Résolution locale d'une EDP en dimension 1

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

31 août 2025

Le présent document présente un problème de calcul différentiel destiné à la résolution d'une EDP avec conditions de Dirichlet en dimension 1. Nous ne nous servirons que des outils étudiés en L3 de mathématiques, que nous rappellerons au cours de l'exposé.

Dans tout ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

$$E = \{u \in \mathcal{C}^2([-1;1]) \mid u(-1) = u(1) = 0\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_E = \sup_{[-1;1]} |u''(t)| + \sup_{[-1;1]} |u'(t)| + \sup_{[-1;1]} |u(t)|$$

Nous noterons $F = \mathcal{C}^0([-1;1])$ l'espace muni de la norme $\|u\|_F = \sup\limits_{[-1;1]} |u(t)|$.

On pourra admettre sans démonstration que $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ sont deux espaces de Banach. On notera $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F que l'on munit de la norme $\|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$.

Une application linéaire u de E dans F est continue ssi :

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E) \ \ \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

ssi :

$$u \text{ est bornée sur la sphère unité}$$

Ce problème est l'examen de Juin 1996 du certificat de calcul différentiel en licence de mathématiques (L3 actuellement) de l'Université Paris XII (Créteil / Marne-la-Vallée), créé par l'esprit tordu ;-) de Franck Pacard, actuellement directeur de l'école Polytechnique.
Le but est de résoudre sur $\mathbb{R} \times E$ l'équation d'inconnues (λ, u) :

$$u" + \lambda u + u^2 = 0$$

La correction est la mienne et donc toutes les erreurs qui pourraient advenir sont de mon fait !

1 Énoncé du problème

Question 1 : On munit $\mathbb{R} \times E$ de la norme produit $\|(\lambda, u)\|_{\mathbb{R}\times E} = \max(|\lambda|, \|u\|_E)$.
Prouver que l'application

$$\mathcal{N} : (\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E \mapsto u'' + \lambda u + u^2 \in F$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times E$ et déterminer sa différentielle.

Question 2 : On suppose que $\lambda \in \left[0; \frac{\pi^2}{4}\right[$.
a) Démontrer que pour tout $f \in F$, il existe une unique solution de

$$(*) \ : \ \begin{cases} w'' + \lambda w = f \ \text{ sur }]-1;1[\\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

qui appartient à E.

b) Démontrer que l'application qui à $f \in F$ associe la solution $w \in E$ de (*) est linéaire continue.

Indication : On pourra chercher w sous la forme :

$$w(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}t) + b\sin(\sqrt{\lambda}t) + \cos(\sqrt{\lambda}t)\int_{-1}^{t}(\cos(\sqrt{\lambda}r))^{-2}\int_{-1}^{r}\cos(\sqrt{\lambda}s)f(s)dsdr$$

où les coefficients a et b restent à déterminer.

Question 3 : On note pour toute la suite $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$.
Démontrer que pour tout $\lambda_0 \in [0; \lambda_1[$, $D_u\mathcal{N}(\lambda_0, 0)$, la différentielle partielle de $\mathcal{N}$ par rapport à u, calculée au point $(\lambda_0, 0)$ est un isomorphisme d'evn de E sur F.
En déduire l'ensemble des solutions de $\mathcal{N}(\lambda, u) = 0$ au voisinage de $(\lambda_0, 0)$.

Question 4 : On note pour toute la suite $\omega_1(t) = \cos(\pi t/2)$.
Vérifier que (λ_1, ω_1) est l'unique solution de (*) telle que :

$$\begin{cases} \omega(t) > 0 \ \text{ sur }]-1;1[\\ \int_{-1}^{1}\omega^2(t)dt = 1 \end{cases}$$

Question 5 : On note

$$E_1 = \{u \in E \mid \int_{-1}^{1} w_1(s)u(s)ds = 0\}$$

et

$$F_1 = \{u \in F \mid \int_{-1}^{1} w_1(s)u(s)ds = 0\}$$

Ces espaces vectoriels sont respectivement munis des normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.
Vous pourrez utiliser sans démonstration que $(E_1, \|.\|_E)$ et $(F_1, \|.\|_F)$ sont des espaces de Banach. Enfin, pour tout $u \in E$ (resp. pour tout $u \in F$), on pose :

$$\Pi(u) = u - \left(\int_{-1}^{1}\omega_1(s)u(s)ds\right)\omega_1$$

Prouver que $\Pi : E \to E_1$ (resp. $\Pi : F \to F_1$) est une application linéaire continue.

Question 6 : a) Démontrer que pour tout $f \in F_1$, il existe une unique solution de :

$$(**) \ : \ \begin{cases} w'' + \lambda_1 w = f \quad \text{sur }]-1;1[\\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

qui appartient à E_1.

b) Prouver que l'application qui à $f \in F_1$ associe la solution $\omega \in E_1$ est linéaire continue.

Indication : Après avoir justifié l'existence de la formule ci-dessous, on pourra établir que ω est donnée par :

$$\omega(t) = \omega_1(t) \int_{-1}^{t} (\omega_1(r))^{-2} \int_{-1}^{r} \omega_1(s) f(s) ds dr$$

Question 7 : a) Démontrer que pour tout $u \in E$:

$$\Pi\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) = \frac{d^2}{dt^2}\Pi(u)$$

b) En déduire que pour tout $(\lambda, \mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1$:

$$\Pi(\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1)) = u'' + \lambda u + \underbrace{(\lambda - \lambda_1)\mu\omega_1}_{\textit{erreur ?} \quad = 0 \text{ ?}} + \Pi[(u + \mu\omega_1)^2]$$

Question 8 : En utilisant les questions précédentes, démontrer que pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, dans un voisinage de $(\lambda_1, 0)$, il existe une unique solution $u_1 \in E_1$ de

$$\Pi(\mathcal{N}(\lambda, u_1 + \mu\omega_1)) = 0$$

On notera $u_1(\lambda, \mu)$ cette solution.

Question 9 : Démontrer que pour tout λ proche de λ_1, on a $u_1(\lambda, 0) = 0$.
En déduire qu'il existe une fonction $(\lambda, \mu) \mapsto \psi(\lambda, \mu)$ continue, définie dans un voisinage de $(\lambda_1, 0)$ telle que :

$$\int_{-1}^{1} \omega_1(s)(u_1(\lambda, \mu)(s) + \mu\omega_1(s))^2 ds = \mu^2 \psi(\lambda, \mu)$$

Indication : on pourra appliquer une formule de Taylor.

Question 10 : On suppose maintenant que l'on est au voisinage de la solution $(\lambda_1, 0)$.
Démontrer que pour tout $(\lambda, \mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1$:

$$\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1) = 0 \iff \begin{cases} \Pi[\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1)] = 0 \\ \int_{-1}^{1} \mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1)(s)\omega_1(s) ds = 0 \end{cases}$$

Question 11 : Déterminer l'ensemble des solutions de $\mathcal{N}(\lambda, u) = 0$ au voisinage de $(\lambda_1, 0)$.

2 Indications

Question 1 : Rappelons quelques définitions ...

Différentielle d'une application entre deux Banach

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \subset E \to F$ une application de U dans F. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire **continue** $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle qu'au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$$

Cette application linéaire ℓ est alors unique, on l'appelle la **différentielle** de f en a, et on note $\ell = Df(a)$ ou $\ell = Df_a$.

Nous écrirons souvent $Df_a.h$ ou $Df(a).h$ plutôt que $Df(a)(h)$ ou $Df_a(h)$.

Pour démontrer que $\mathcal{N}$ est différentiable en $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$ quelconque, on peut revenir à la définition en exprimant $\mathcal{N}(\lambda+\gamma, u+h) - \mathcal{N}(\lambda, u)$ comme un terme linéaire $L(\gamma, h)$ en (γ, h) plus un petit $o(\|(\gamma, h)\|)$, puis prouver que L est continue à l'aide de la caractérisation de la continuité des AL dans les evn.
Attention : être linéaire en (γ, h), ce n'est pas être linéaire séparément par rapport à γ puis par rapport à h ! On peut aussi remarquer que $\mathcal{N}$ est la somme d'un terme linéaire et d'un terme quadratique, tous deux différentiables ...

Application de classe $\mathcal{C}^1$

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de U dans F. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$** sur U si

$$Df \ : \ a \in U \mapsto Df(a) \in \mathcal{L}_c(E, F) \ \text{ est continue}$$

Attention, en général Df n'est PAS une application linéaire.

Pour prouver que $\mathcal{N}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times E$, on prouvera que pour tout $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$, $\lim\limits_{(\lambda', v) \to (\lambda, u)} \|Df(\lambda', v) - Df(\lambda, u)\|_{\mathcal{L}_c(\mathbb{R}\times E, F)} = 0$.

Question 2 : Commencer par l'unicité, ce qui amènera à une EDO linéaire du second ordre à coefficients constants, puis se servir de la formule proposée pour l'existence.

Question 3 : Il s'agit de connaître la notion de différentielle partielle de manière à pouvoir utiliser le théorème des fonctions implicites.
Remarquons qu'en dimension infinie, la continuité des applications linéaires n'est pas automatique. L'outil phare est le théorème de Banach.

Théorème de Banach

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. Si $u \in \mathcal{L}_c(E; F)$ est bijective, alors u^{-1} est continue de F dans E.
Bref, u est un isomorphisme d'evn.

Différentielle partielle

Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G, (x, y) \mapsto f(x, y)$ une application différentiable de U dans G et $a = (a_1, a_2) \in U$. Alors $f(., a_2) : E \to G$ est différentiable en a_1 et on note $Df_{a_1}(a_1, a_2) \in \mathcal{L}_c(E, G)$ la différentielle de $f(., a_2)$ au point $a_1 \in E$.
On l'appelle la **différentielle partielle** de f en la première variable en (a_1, a_2) :

$$f(a_1 + h_1, a_2) = f(a_1, a_2) + Df_{a_1}(a_1, a_2).h_1 + o(\|h_1\|_E)$$

Si de plus, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, alors $f(., a_2)$ l'est aussi sur $U \cap (E \times \{a_2\})$.

Nous avons pour tout $a = (a_1, a_2) \in U$:

$$Df(a).(h_1, h_2) = Df_{a_1}(a).h_1 + Df_{a_2}(a).h_2$$

Théorème des fonctions implicites

Soient E, F et G trois espaces de Banach, U un ouvert de $E \times F$ et $f : U \to G$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $(a, b) \in U$ tel que $f(a, b) = 0$. On suppose que $D_y f(a, b) : F \to G$ est un isomorphisme d'evn. Alors :

1. Il existe $V \subset U$ voisinage ouvert de (a, b),
2. Il existe $W \subset E$ voisinage ouvert de a,
3. Il existe une application $\phi : W \to G$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
   $[(x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = 0] \iff [x \in W \text{ et } y = \phi(x)]$, avec $\phi(a) = b$.

   De plus, pour x proche de a : $D\phi(x) = -[D_y f(x, \phi(x))]^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x))$.

Question 4 : Vérifier d'abord que (λ_1, ω_1) vérifie les conditions demandées, puis prouver l'unicité : on pourra se ramener au cas $\lambda \in \left[0; \dfrac{\pi^2}{4}\right]$.

Question 5 : Il s'agit d'utiliser la caractérisation d'une application linéaire continue entre deux evn E et F en effectuant des majorations adéquates ; prouver qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $u \in E$: $\|\Pi(u)\|_{E_1} \leq C\|u\|_E$. Pareil avec F et F_1.

Question 6 : 1) On vérifie que si $u \in E$, alors $\Pi(u) \in E_1$ et que $\omega_1 \in E_1$.
2) Le fait que Π soit linéaire ne pose pas de problème.
3) Nous pouvons remarquer alors que Π est la projection de E sur E_1 (resp. de F sur F_1), parallèlement à $\mathbb{R}\omega_1$. Mais étant en dimension infinie, il nous reste à prouver la continuité de Π.

Question 7 : Simple calcul.

Question 8 : L'énoncé suggère d'utiliser le théorème des fonctions implicites à une fonction bien choisie.

Question 9 :

Question 10 : Un sens est évident. Pour l'autre, se rappeler que Π est la projection sur E_1 parallèlement à $\mathbb{R}\omega_1$.

Question 11 : RAS

3 Résolution détaillée

Question 1 : $E \subset F$ et $(\forall u \in E)$ $\max(\|u''\|_F, \|u'\|_F, \|u\|_F) \leq \|u\|_E$ et $\|.\|_F$ est une norme d'algèbre i.e vérifiant : $\|u.v\|_F \leq \|u\|_F.\|v\|_F$ $(\forall u, v \in F)$.
On se donne $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times E$ quelconque.

1. Soit $(\gamma, h) \in \mathbb{R} \times E$: $\mathcal{N}(\lambda + \gamma, u + h) = \mathcal{N}(\lambda, \mu) + (h'' + \lambda h + \gamma u + 2uh) + (\gamma h + h^2)$.
   Posons $L(\gamma, h) = h'' + \lambda h + \gamma u + 2uh$ et $R(\gamma, h) = \gamma h + h^2$.
   Nous noterons $\|(\gamma, h)\|$ plutôt que $\|(\gamma, h)\|_{\mathbb{R}\times E}$.
   — L est linéaire en (γ, h) et une majoration simple conduit à :
   $\|L(\gamma, h)\|_F \leq (1 + |\lambda| + 3\|u\|_E)\|(\gamma, h)\|$. Donc L est continue.
   — De même, $\|R(\gamma, h)\|_F \leq 2\|(\gamma, h)\|^2$. Donc $R(\gamma, h) = o(\|(\gamma, h)\|)$.
   Ainsi, $\mathcal{N}$ est différentiable en (λ, u) et $\underline{D\mathcal{N}(\lambda, u).(\gamma, h) = h'' + \lambda h + \gamma u + 2uh}$.

2. Soient $(\lambda, u),\ (\lambda', v) \in \mathbb{R} \times E$ et soit $(\gamma, h) \in \mathbb{R} \times E$ de norme 1 :
   $$D\mathcal{N}(\lambda, u).(\gamma, h) - D\mathcal{N}(\lambda', v).(\gamma, h) = (\lambda - \lambda')h + \gamma(u - v) + 2(u - v)h$$
   On en déduit que :
   $$\sup_{\|(\gamma,h)\|=1} \|D\mathcal{N}(\lambda, u).(\gamma, h) - D\mathcal{N}(\lambda', v).(\gamma, h)\|_F \leq 3\max(|\lambda - \lambda'|, \|u - v\|_E) = 3\|(\lambda - \lambda', u - v)\|$$
   Le terme majorant tendant vers 0 lorsque $(\lambda, u) \to (\lambda', v)$.

   Ainsi, $\underline{\mathcal{N} \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \times E}$.

C'est une question relativement technique qui demande néanmoins beaucoup de soin lorsque l'on jongle avec les normes pour obtenir des majorations.

Question 2 : Soit donc $\lambda \in \left[0; \dfrac{\pi^2}{4}\right[$. Ainsi $\cos(\sqrt{\lambda}) > 0$ et $\sin(\sqrt{\lambda}) \geq 0$.

a) **Unicité** : Supposons qu'il existe deux solutions ω_1 et ω_2 de (*). Posons alors $\omega = \omega_1 - \omega_2$. Alors ω est solution de :

$$(Pb_0)\ :\ \begin{cases} w'' + \lambda w = 0 \ \text{ sur }]-1; 1[\\ \omega(-1) = \omega(1) = 0 \end{cases}$$

(Pb_0) a pour équation caractéristique $r^2 + \lambda = 0$.

<u>Cas 1</u> : $\lambda > 0$.
L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées : $\pm i\sqrt{\lambda}$.
Les solutions de $w'' + \lambda w = 0$ sont les fonctions définies sur $[-1; 1]$ par :
$\omega : t \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}t)$.
Or $\omega(\pm 1) = 0$, ce qui conduit au système :

$$\begin{cases} A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}) - B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

On a alors immédiatement $A = B = 0$ et donc $\omega = \omega_1 - \omega_2 = 0$ i.e $\omega_1 = \omega_2$ et l'unicité.

<u>Cas 2</u> : $\lambda = 0$.
On a immédiatement $\omega(t) = At + B$

Les conditions initiales nous amènent au système :

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=0 \end{cases}$$

ce qui conduit à $A=B=0$ et donc $\omega=\omega_1-\omega_2=0$ et l'unicité.

b) **Existence** :
Nous allons utiliser la formule proposée par l'énoncé (un bon exercice est de comprendre d'où elle provient).

Nous cherchons donc ω sous la forme :

$$w(t)=a\cos(\sqrt{\lambda}t)+b\sin(\sqrt{\lambda}t)+\cos(\sqrt{\lambda}t)\int_{-1}^{t}(\cos(\sqrt{\lambda}r))^{-2}\int_{-1}^{r}\cos(\sqrt{\lambda}s)f(s)dsdr$$

Un calcul simple conduit à : $\omega''(t)=-\lambda\omega(t)+f(t)$, donc $\omega''+\lambda\omega=f$ sur $]-1;1[$.
Il reste à déterminer a et b afin que ω soit solution de (*).
La condition aux limites $\omega(\pm 1)=0$ conduit au système :

$$\begin{cases} a\cos(\sqrt{\lambda})-b\sin(\sqrt{\lambda})=0 \\ a\cos(\sqrt{\lambda})+b\sin(\sqrt{\lambda})+\cos(\sqrt{\lambda})\int_{-1}^{1}(\cos(\sqrt{\lambda}r))^{-2}\int_{-1}^{r}\cos(\sqrt{\lambda}s)f(s)dsdr=0 \end{cases}$$

On en déduit après calculs :

$$\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1}(\cos(\sqrt{\lambda}r))^{-2}\int_{-1}^{r}\cos(\sqrt{\lambda}s)f(s)dsdr \\ b=-\dfrac{\cos(\sqrt{\lambda})}{2}\int_{-1}^{1}(\cos(\sqrt{\lambda}r))^{-2}\int_{-1}^{r}\cos(\sqrt{\lambda}s)f(s)dsdr \end{cases}$$

Conclusion : il existe une unique solution de (*) quelle que soit $f\in F$.

La correspondance qui à $f\in F$ associe ω solution de (*) est donc une fonction (on aurait dit application avant). Il est clair qu'elle est **linéaire**. De plus, l'inégalité $\|f\|_F\leq(1+|\lambda|)\|\omega\|_E$ nous assure sa **continuité**.

Question 3 : Soit $\lambda_0\in[0;\lambda[$. On a $\mathcal{N}(\lambda_0,0)=0$.
D'après la question 1, on a : $D_u\mathcal{N}(\lambda_0,0).h=\underbrace{h''+\lambda_0 h}_{\in F}$ $(\forall h\in E)$.
D'après la question 2, $(\forall f\in F)$ $(\exists h\in E)$ $D_u\mathcal{N}(\lambda_0,0)$ est une bijection linéaire de E dans F.
De plus, $\mathcal{N}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\times E$, donc $D_u\mathcal{N}(\lambda_0,0)$ est continue sur E.
Le théorème de Banach nous assure que $[D_u\mathcal{N}(\lambda_0,0)]^{-1}$ est continue.
Ainsi, $D_u\mathcal{N}(\lambda_0,0)$ est un isomorphisme d'evn de E sur F.

D'après le **Théorème des fonctions implicites** (TFI),
- Il existe $V\subset\mathbb{R}\times E$ voisinage ouvert de $(\lambda_0,0)$,
- Il existe $W\subset\mathbb{R}$ voisinage ouvert de λ_0,
- Il existe $\phi:W\to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :
  $((\lambda,u)\in V$ et $\mathcal{N}(\lambda,u)=0)\iff(\lambda\in W$ et $u=\phi(\lambda)$ et $\phi(\lambda_0)=0)$.

Question 4 : On pose $\lambda_1 = \dfrac{\pi^2}{4}$ et $\omega_1(t) = \cos(\pi t/2)$.

Existence :
a) $\omega_1''(t) = -\dfrac{\pi^2}{4}\cos\left(\dfrac{\pi t}{2}\right) = -\dfrac{\pi^2}{4}\omega_1(t)$. D'où $\omega_1'' + \lambda_1\omega_1 = 0$ sur $]-1;1[$.
b) De plus, $\omega_1(\pm 1) = 0$. Et comme $t \in]-1;1[$, $\dfrac{\pi t}{2} \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $\omega_1(t) > 0$ sur $]-1;1[$.
c) On a $\omega_1^2(t) = \dfrac{\cos(\pi t)+1}{2}$, d'où $\displaystyle\int_{-1}^{1}\omega_1^2(t)dt = 1$.

Ainsi, (λ_1, ω_1) est solution de $\omega'' + \lambda\omega = 0$ sur $]-1;1[$, avec $\omega(\pm 1) = 0$, $\omega(t) > 0$ sur $]-1;1[$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1}\omega^2(t)dt = 1$.

Unicité :
Soit (λ, ω) une solution de (*) vérifiant $\omega(t) > 0$ sur $]-1;1[$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1}\omega^2(t)dt = 1$.
L'énoncé ne donne aucune précision sur le signe de λ mais un raisonnement par l'absurde, en distinguant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$ contredit $\omega > 0$ sur $]-1;1[$. On peut donc supposer $\lambda > 0$ et même $\lambda \in \left]0;\dfrac{\pi^2}{4}\right]$.
L'équation caractéristique de $\omega'' + \lambda\omega = 0$ sur $]-1;1[$ étant $r^2 + \lambda = 0$, admet pour solutions les fonctions $t \mapsto A\cos(\sqrt{\lambda}t) + B\sin(\sqrt{\lambda}t)$. Les conditions $\omega(\pm 1) = 0$ amène au système :

$$\begin{cases} A\cos(\sqrt{\lambda}) + B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \\ A\cos(\sqrt{\lambda}) - B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases}$$

D'où : $\begin{cases} A\cos(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad (1) \\ B\sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad (2) \end{cases}$
Supposons $\lambda \neq \dfrac{\pi^2}{4}$, alors comme $\sqrt{\lambda} \in \left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\sin(\sqrt{\lambda}) > 0$, on en déduit $B = 0$ et comme $\cos(\sqrt{\lambda}) > 0$ également, on a $A = 0$. D'où $\omega = 0$. Contredit $\omega > 0$ sur $]-1;1[$.
Ainsi $\underline{\lambda = \lambda_1}$.

On a donc $\omega(t) = A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) + B\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$.
Les conditions $\omega(\pm 1) = 0$ donnent $\omega(t) = A\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$. Comme $(\forall t \in]-1;1[)$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) > 0$ et par hypothèse $w(t) > 0$ sur $]-1;1[$, on a : $A > 0$.
Enfin, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\omega^2(t)dt = 1 \iff A^2\int_{-1}^{1}\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}t\right) = 1 \iff \dfrac{A^2}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos(\pi t))dt = 1 \iff$ $A^2 = 1$. D'où $A = 1$ puis $\underline{\omega = \omega_1}$.

Conclusion : Ainsi, (λ_1, ω_1) est l'unique solution de $\omega'' + \lambda\omega = 0$ sur $]-1;1[$, qui vérifie $\omega(\pm 1) = 0$, $\omega > 0$ sur $]-1;1[$ et $\displaystyle\int_{-1}^{1}\omega^2(t)dt = 1$.

Question 5 : Rappelons que $E_1 = \{u \in E \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} w_1(s)u(s)ds = 0\}$ et
$F_1 = \{u \in F \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} w_1(s)u(s)ds = 0\}$, espaces vectoriels munis respectivement des normes

$\|.\|_E$ et $\|.\|_F$. Enfin, $\Pi : \begin{cases} E \to E_1 \\ u \mapsto u - \left(\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds\right)\omega_1 \end{cases}$

On vérifie que si $u \in E$, alors $\Pi(u) \in E_1$. En effet :

$$\int_{-1}^1 \omega_1(s)\Pi(u)(s)ds = \int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds - \left(\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds\right)\underbrace{\left(\int_{-1}^1 \omega_1^2(s)ds\right)}_{=1} = 0$$

et que $\omega_1 \in E_1$ car :

$$\Pi(\omega_1) = \omega_1 - \underbrace{\left(\int_{-1}^1 \omega_1^2(s)ds\right)}_{=1}\omega_1 = 0$$

La linéarité de Π ne pose aucun problème.
De plus, $E = E_1 \oplus \mathbb{R}\omega_1$. En effet :

1. Si $u \in E$: $u = \Pi(u) + \left(\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds\right)\omega_1 \in E_1 + \mathbb{R}\omega_1$
2. Soit $u \in E_1 \cap \mathbb{R}\omega_1$: $(\exists \mu \in \mathbb{R})$ $u = \mu\omega_1$ et $\displaystyle\int_{-1}^1 \mu\omega_1^2(s)ds = 0$. D'où :
   $\displaystyle\int_{-1}^1 \mu\omega_1^2(s)ds = \mu\underbrace{\int_{-1}^1 \omega_1^2(s)ds}_{=1} = 0$ et partant $u \equiv 0$.

Ainsi, Π est l'opérateur de projection sur E_1 parallèlement à $\mathbb{R}\omega_1$. Prouvons la continuité de $\Pi : E \to E_1$.

On a pour tout $t \in [-1;1]$:
- $[\Pi(u)](t) = u(t) - \left(\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds\right)\omega_1(t)$
- $[\Pi(u)]'(t) = u'(t) - \dfrac{\pi}{2}\left(\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds\right)\sin\left(\dfrac{\pi t}{2}\right)$
- $[\Pi(u)]''(t) = u''(t) + \dfrac{\pi^2}{4}\left(\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds\right)\omega_1(t)$

Remarquons de plus que $|\int_{-1}^1 w_1(s)u(s)ds| \leq 2\|u\|_\infty$ et que $\|\omega_1\| \leq 1$. Nous en déduisons que :
- $\|\Pi(u)\|_\infty \leq 3\|u\|_\infty$
- $\|[\Pi(u)]'\|_\infty \leq \|u'\|_\infty + \pi\|u\|_\infty$
- $\|[\Pi(u)]''\|_\infty \leq \|u''\|_\infty + \dfrac{\pi^2}{2}\|u\|_\infty$

On en déduit que :

$$\|\Pi(u)\|_E \leq \left(3 + \pi + \frac{\pi^2}{2}\right)\|u\|_E$$

Donc Π est continue de E dans E_1.
De la même manière, Π est continue de F dans F_1.

Remarque : En fait, un vrai opérateur projection est un endomorphisme de E, nous avons donc travaillé avec sa co-restriction sur le sous-espace de E sur lequel on projette : E_1, qui est muni de la même norme que celle de E.

Question 6 : a) Le procédé est identique à celui exposé à la question 2. Pour gagner un peu de temps, nous ne le détaillerons pas à nouveau.

b) **Linéarité** : Soient $f, g \in F_1$ et $\mu \in \mathbb{R}$. L'unique solution de (**) associée au second membre $\mu f + g$ est clairement $\mu\omega_f + \omega_g$, où ω_f et ω_g sont les solutions de (**) respectivement avec pour second membre f puis g.

Continuité : Soit $f \in F_1$: $\|f\|_F \leq \max(1, \lambda_1)\|\omega\|_E = \lambda_1\|\omega\|_E$. Donc l'application $f \in F_1 \mapsto \omega \in E_1$ de :

$$(**) \ : \ \begin{cases} w'' + \lambda_1 w = f \ \text{ sur }]-1;1[\\ w(-1) = w(1) = 0 \end{cases}$$

est continue.

Question 7 : a) Soit $u \in E$.

$$\Pi(u") = u"(t) - \left(\int_{-1}^{1} \omega_1(s)u"(s)ds\right)\omega_1$$

Effectuant une première IPP :

$$\int_{-1}^{1} \omega_1(s)u"(s)ds = \underbrace{[\omega_1(s)u'(s)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \omega_1'(s)u'(s)ds$$

Utilisant le fait que $\omega_1" = -\dfrac{\pi^2}{4}\omega_1 = -\lambda_1\omega_1$, nous avons avec une seconde IPP :

$$\int_{-1}^{1} \omega_1'(s)u'(s)ds = \underbrace{[u(s)\omega_1'(s)]_{-1}^{1}}_{=0} + \frac{\pi^2}{4}\int_{-1}^{1} u(s)\omega_1(s)ds$$

D'où :

$$\Pi(u") = u" + \frac{\pi^2}{4}\left(\int^{1} u(s)\omega_1(s)ds\right)\omega_1$$

Soit enfin :

$$\Pi(u") = \left[u - \left(\int_{-1}^{1} u(s)\omega_1(s)ds\right)\omega_1\right]" = [\Pi(u)]"$$

b) Soit $(\lambda, \mu, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1$:

$\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1) = (u + \mu\omega_1)" + \lambda(u + \mu\omega_1) + (u + \mu\omega_1)^2$, soit :
$\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1) = u" - \mu\lambda_1\omega_1 + \lambda u + \lambda\mu\omega_1 + (u + \mu\omega_1)^2$ i.e
$\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1) = u" + \lambda u + (\lambda - \lambda_1)\mu\omega_1 + (u + \mu\omega_1)^2$.

D'où par linéarité de Π et ce qui précède :
$\Pi(\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1)) = \Pi(u)" + \lambda\Pi(u) + (\lambda - \lambda_1)\mu\Pi(\omega_1) + \Pi[(u + \mu\omega_1)^2)]$.
Or si $u \in E_1$, alors $\Pi(u) = u$ et $\Pi(\omega_1) = 0$, d'où :

$$\Pi(\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1)) = u" + \lambda u + \Pi[(u + \mu\omega_1)^2)]$$

Question 8 : Considérons $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1, \ (\lambda, \mu, u) \mapsto \Pi[\mathcal{N}(\lambda, u + \mu\omega_1)]$.

Définissons :

1. ϕ ; $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1 \to \mathbb{R} \times E, \ (\lambda, \mu, u) \mapsto (\lambda, u + \mu\omega_1)$
2. $\mathcal{N}$: $\mathbb{R} \times E \to F, \ (\lambda, u) \mapsto u" + \lambda u + u^2$

3. $\Pi \ : \ F \to F_1, \ u \mapsto u \mapsto u - \left(\int_{-1}^{1} w_1(s)u(s)ds\right)\omega_1$

Ainsi : $\Psi = \Pi \circ \mathcal{N} \circ \phi \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1 \to F_1$. Notons que Π et ϕ sont linéaires.

$$\begin{aligned}
\Psi(\lambda_1, 0, u+h) - \Psi(\lambda_1, 0, u) &= \Pi[\mathcal{N}(\lambda_1, u+h)] - \Pi[\mathcal{N}(\lambda_1, u)] \\
&= \Pi[\mathcal{N}(\lambda_1, u+h) - \mathcal{N}(\lambda_1, u)] \\
&= \Pi[(u+h)\text{''} + \lambda_1(u+h) + (u+h)^2 - u\text{''} - \lambda_1 u - u^2] \\
&= \Pi[h\text{''} + \lambda_1 h + 2uh + h^2] \\
&= h\text{''} + \lambda_1 h + 2\Pi(uh) + \underbrace{\Pi(h^2)}_{=o(h)} \quad \text{par 7)}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement (ou presque) que pour tout $h \in E_1$: $D_u\Psi(\lambda_1, 0, 0).h = h\text{''} + \lambda_1 h$.
La question 6) et le théorème de Banach nous assurent que $D_u\Psi(\lambda_1, 0, 0)$ est un isomorphisme d'evn de E_1 sur F_1.
Or Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ comme composée d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ et $\Psi(\lambda_1, 0, 0) = 0$.

Le **théorème des fonctions implicites** nous dit alors que :
- Il existe $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E_1$ voisinage ouvert de $(\lambda_1, 0, 0)$,
- Il existe $W \subset \mathbb{R}^2$ voisinage ouvert de $(\lambda_1, 0)$
- Il existe $w \ : \ W \to E_1$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
  $(\lambda, \mu, u) \in V$ et $w(\lambda, \mu, u) = 0 \iff [u \in W$ et $u = w(\lambda, \mu)$ et $w(\lambda_1, 0) = 0]$

Donc pour (λ, μ) dans un voisinage de $(\lambda_1, 0)$, il existe un unique $u_1 \in E_1$ tel que $\Psi(\lambda, \mu, u_1) = 0$ i.e $\Pi[\mathcal{N}(\lambda, u_1 + \mu\omega_1)] = 0$. On notera $u_1 = u_1(\lambda, \mu)$.

Question 9 : On a $u_1(\lambda_1, 0) = 0$.

J'admets que pour λ proche de λ_1, on a $u_1(\lambda, 0) = 0$. Au voisinage de $(\lambda_1, 0)$, on a d'après la formule de Taylor avec reste intégral pour $u_1(\lambda, \mu)$ de classe $\mathcal{C}^2$:

$$u_1(\lambda, \mu) = \underbrace{u_1(\lambda, 0)}_{=0} + \mu \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial \mu}(\lambda, 0)}_{=0} + \int_{-1}^{1} \frac{\mu^2}{2!}(1-t)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mu^2} u_1(\lambda, t)dt$$

Bref :

$$u_1(\lambda, \mu) = \frac{\mu^2}{2} \int_{-1}^{1} (1-t)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mu^2}(\lambda, t)dt$$

Or $\psi : (\lambda, \mu) \mapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{(1-t)^2}{2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \mu^2}(\lambda, t)dt$ est continue au voisinage de $(\lambda_1, 0)$ **(à justifier)**.

Ce qui suit est un brouillon d'idées !

Par définition : $\Pi[(u_1 + \mu\omega_1)^2] = (u_1 + \mu\omega_1)^2 - \displaystyle\int_{-1}^{1} \omega_1(s)(u_1 + \mu\omega_1)^2 ds$

Or par 7) $\Pi[\mathcal{N}(\lambda, u_1 + \mu\omega_1)] = u_1\text{''} + \lambda u_1 + \Pi[(u_1 + \mu\omega_1)^2]$.
D'après 8) pour (λ, μ) dans un voisinage de $(\lambda_1, 0)$: $\Pi[\mathcal{N}(\lambda, u_1 + \mu\omega_1)] = 0$.
Donc pour (λ, μ) dans un voisinage de $(\lambda_1, 0)$:

$$0 = u_1\text{''} + \lambda u_1 + (u_1 + \mu\omega_1)^2 - \int_{-1}^{1} \omega_1(s)(u_1(\lambda, \mu)(s) + \mu\omega_1(s))^2 ds$$

Et donc :

$$\Pi[\mathcal{N}(\lambda, u_1(\lambda, \mu) + \mu\omega_1)] = \int_{-1}^{1} \omega_1(s)(u_1(\lambda, \mu)(s) + \mu\omega_1(s))^2 ds$$

To be continued ...

Question 10 : Le sens direct ($\Longrightarrow$) est évident.

Réciproquement, supposons que dans un voisinage de $(\lambda_1, 0)$: $\begin{cases} \Pi[\mathcal{N}(\lambda, u+\mu\omega_1)] = 0 & (1) \\ \int_{-1}^{1} \mathcal{N}(\lambda, u+\mu\omega_1)(s)\omega_1(s)ds = 0 & (2) \end{cases}$

La première condition (1) implique que $\mathcal{N}(\lambda, u+\mu\omega_1) \in \mathbb{R}\omega_1$, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{N}(\lambda, u+\mu\omega_1) = \alpha\omega_1$.

Reportant dans (2) et se servant du fait que $\int_{-1}^{1} \omega_1^2(s)ds = 1$, on en déduit que $\alpha = 0$. D'où $\mathcal{N}(\lambda, u+\mu\omega_1) = 0$.

Question 11 : Se servant du fait que $E = E_1 \oplus \mathbb{R}\omega_1$, on déduit de la question 10 qu'au voisinage de $(\lambda_1, 0)$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{N}(\lambda, u) = 0$ est la fonction nulle.