Fiche technique n°0
Intégration de Lebesgue (I)
Le Bastard Yannick - LEGTA Frédéric Bazille

I. Rappels sur les ensembles

1) Relations ensemblistes utiles

Soient X et Y deux ensembles, et $f : X \to Y$ une application.

— Image directe : si $A \subset X$, alors

$$f(A) = \{f(x) \ ; \ x \in A\} \subset Y.$$

— Image réciproque : si $B \subset Y$, alors

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \ ; \ f(x) \in B\} \subset X.$$

Lois de De Morgan :

— Pour deux ensembles :

$$A \subset f^{-1}(f(A)), \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B.$$

(avec égalité seulement si f est injective resp. si f surjective)

— Pour plus de deux ensembles :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(B_j),$$

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(B_j).$$

(Tout va bien pour les images réciproques)

2) Limites inférieures et supérieures d'ensembles

Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de sous-ensembles d'un ensemble X.

— Limite supérieure :

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq n} A_m = \{x \in X \ ; \ x \in A_n \text{ pour une infinité de } n\}.$$

— Limite inférieure :

$$\liminf A_n = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{m\geq n} A_m = \{x \in X \ ; \ x \in A_n \text{ sauf pour un nombre fini de } n\}.$$

— Propriété :

$$(\limsup A_n)^c = \liminf(A_n^c), \qquad (\liminf A_n)^c = \limsup(A_n^c).$$

II. Tribu et topologie sur un ensemble X

1) Définitions

Tribu (σ-algèbre) sur X

Une **tribu** sur X est une famille $\mathcal{A}$ de parties de X telle que :

(i) $\varnothing \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$,

(iii) $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Alors $(X, \mathcal{A})$ est un **espace mesurable**.

Topologie sur X

Une **topologie** sur X est une famille $\mathcal{G}$ de parties de X telle que :

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{G}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{G} \implies A \cap B \in \mathcal{G}$,

(iii) $(U_i)_{i\in I} \subset \mathcal{G} \implies \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{G}$.

Alors $(X, \mathcal{G})$ est un **espace topologique**.

2) Exemples de base

Tribus :

— $\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$: tribu grossière.

— $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$: tribu discrète.

— $\mathcal{A} = \{A \subset X\ ;\ A$ dénombrable ou A^c dénombrable$\}$.

Topologies :

— $\mathcal{G} = \{\varnothing, X\}$: topologie grossière.

— $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$: topologie discrète.

— $\mathcal{G} = \{A \subset X\ ;\ A$ fini ou A^c fini$\}$.

Entre autres constructions communes, on va avoir la tribu (resp. la topologie) engendrée par une famille de parties de X.

Tribu engendrée :

— Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X.
$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\mathcal{E}\subset\mathcal{T},\ \mathcal{T} \text{ tribu}} \mathcal{T}$ est la plus petite tribu sur X contenant $\mathcal{E}$. On l'appelle la tribu engendrée par $\mathcal{E}$.

— Description de ses éléments :
Pas de description simple.

Topologie engendrée :

— Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ une famille de parties de X.
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \bigcap_{\mathcal{E}\subset\mathcal{O},\ \mathcal{O} \text{ topologie}} \mathcal{O}$ est la plus petite topologie sur X contenant $\mathcal{E}$. On l'appelle la topologie engendrée par $\mathcal{E}$.

— Description de ses éléments :
$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \{\bigcup_{\text{qq}} \bigcap_{\text{finies}} O,\ O \in \mathcal{E}\}$.
$\mathcal{E}$ est appelée une prébase de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

III. Lien entre tribu engendrée et topologie engendrée

1) Tribu Borélienne

Soit $(X, \mathcal{O}(X))$ un espace topologique.
La **tribu borélienne** de X, appelée aussi tribu des boréliens de X, est définie par :

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\mathcal{O}(X)).$$

c'est-à-dire la plus petite tribu contenant les ouverts de X.

Cas particulier fondamental : Les espaces topologiques à base dénombrable d'ouverts.

<u>Exemple</u> : les espaces métriques séparables.

Encore plus de dénombrabilité : Si (X, d) est un espace métrique **séparable** (i.e. admet une suite (x_n) dense), alors une base dénombrable d'ouverts de X est :

$$\mathcal{B}(X) = \{B(x_n, r)\ ;\ n \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Q}_+^*\},$$

avec $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}_+^*$ dénombrable.

Conséquence : Tout ouvert O d'un espace métrique séparable s'écrit comme réunion dénombrable de boules $B(x_n, r)$ avec $x_n \in X$, $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

Par stabilité d'une tribu par réunion dénombrable et par définition de la tribu borélienne :

2) Théorème :

Si X est un espace topologique **possédant une base dénombrable d'ouverts** $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

$$\mathcal{B}(X) = \sigma(\{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}).$$

On peut encore "réduire" le nombre d'éléments engendrant la tribu des boréliens de X dans certains cas.

Exemple fondamental : $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Technique de réécriture à retenir)

On sait que : $\{]a, b[\ ;\ a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$ est une base dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Or $]a; b[=]a; +\infty[\cap[b; +\infty[^c$.
et :

$$]a, +\infty[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \tfrac{1}{n}, b\right[\quad \text{(réunion croissante)}.$$

Donc $]a, b[$ s'écrit comme réunion dénombrable d'intervalles de type $[\alpha, +\infty[$ ou de leurs complémentaires, avec $\alpha \in \mathbb{Q}$.
Ainsi :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{Q}\}).$$

De même :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{]a, +\infty[\ ;\ a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{] - \infty, a], a \in \mathbb{Q}\}) = \sigma(\{] - \infty, a[, a \in \mathbb{Q}\}).$$

3) Tribu engendrée : caractère d'être la plus petite

1. Si $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$ et $\mathcal{T}$ une tribu contenant $\mathcal{E}$, alors : $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}$.
2. Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux familles de parties de X avec $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, alors $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{F})$.

4) Propriétés ensemblistes des tribus

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X :

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. Si (A_n) est une famille d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$.
3. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \setminus B \in \mathcal{A}$.
4. Si $A, B \in \mathcal{A}$ alors $A \Delta B \in \mathcal{A}$.
5. Si (A_n) est une suite dans $\mathcal{A}$, alors $\limsup A_n \in \mathcal{A}$ et $\liminf A_n \in \mathcal{A}$.

IV. Tribus image / image-réciproque – Lemme de transport

Tribu image-réciproque : Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{B}$ une tribu sur Y. Alors

$$f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \; ; \; B \in \mathcal{B}\}$$

est une tribu sur X.

Tribu image : Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Alors

$$\mathcal{B} = \{B \subset Y \; ; \; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu sur Y, appelée **tribu-image**.

Topologie image-réciproque : Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{G}_Y$ une topologie sur Y. Alors

$$f^{-1}(\mathcal{G}_Y) = \{f^{-1}(U) \; ; \; U \in \mathcal{G}_Y\}$$

est une topologie sur X.

Topologie image : Soit $f : X \to Y$ une application et $\mathcal{G}_X$ une topologie sur X. Alors

$$\mathcal{G}_Y = \{V \subset Y \; ; \; f^{-1}(V) \in \mathcal{G}_X\}$$

est une topologie sur Y, appelée **topologie-image**.

Lemme de transport

Soit $f : X \to Y$ et $\mathcal{E}$ une famille de parties de Y. Alors

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E})).$$

L'image réciproque de la tribu $\sigma(\mathcal{E})$ de Y par f est une tribu sur X qui coïncide avec la tribu engendrée par les réciproques des éléments de $\mathcal{E}$.

Application : Si $(X, \mathcal{O}_X)$ est un espace topologique et $Y \subset X$, alors $\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y \; ; \; A \in \mathcal{B}(X)\}$. En particulier $\mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X) \iff Y \in \mathcal{B}(X)$.
On a alors $\mathcal{B}(Y) = \{A \in \mathcal{B}(X) \; ; \; A \subset Y\}$.

Version topologique : Soit $f; X \to Y$ et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(Y)$. Notons respectivement $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ et $\mathcal{O}_{f^{-1}(\mathcal{E})}$ les topologies sur Y et sur X engendrées par $\mathcal{E}$ et $f^{-1}(\mathcal{E})$. Alors :

$$f^{-1}(\mathcal{O}_\mathcal{E}) = \mathcal{O}_{f^{-1}(\mathcal{E})}$$