Un exercice de mise en jambes (calcul différentiel en L3)

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

27 juillet 2025

Définissons :

$$H = \{u \in \mathcal{C}^2([0;1], \mathbb{R}) \mid u(0) = u(1) = 0\}$$

Si $u \in H$ on note :

$$\|u\|_0 = \sup_{t \in [0;1]} |u(t)|$$

et :

$$\|u\|_1 = \left(\int_0^1 (u'^2(t) + u^2(t)) dt \right)^{1/2}$$

On note enfin :

$$\|u\|_2 = \left(\int_0^1 u'^2(t) dt \right)^{1/2}$$

ADMIS : $\|.\|_0$ et $\|.\|_1$ sont des normes sur H et $(H, \|.\|_1)$ est un espace de Banach.

1 Énoncé

Question 1 : Démontrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in H$:

$$\|u\|_0 \leq c\|u\|_2$$

Question 2 : Démontrer que $\|.\|_2$ est une norme sur H.

Question 3 : Démontrer que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.

Question 4 : Les normes $\|.\|_0$ et $\|.\|_1$ sont-elles équivalentes ?

Question 5 : Dans toute la suite, on suppose que H est muni de la norme $\|.\|_2$.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'application

$$\phi_p : u \in H \mapsto \int_0^1 u^p(t) dt \in \mathbb{R}$$

est différentiable en tout point $u \in H$ et que :

$$D\phi_p(u).h = p \int_0^1 u^{p-1}(t) h(t) dt$$

Question 6 : Démontrer que ϕ_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(H, \|.\|_2)$.

2 Corrigé

Question 1 : Soit $u \in H$ et $t \in [0;1]$. D'après le théorème fondamental du calcul intégral :

$$u(t) - \underbrace{u(0)}_{=0} = \int_0^t u'(x)dx$$

D'où :

$$|u(t)| = \left|\int_0^t u'(x)dx\right| \leq \int_0^t 1 \times |u'(x)|dx \underbrace{\leq}_{Cauchy-Schwarz} \left(\int_0^t 1^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^t u'(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Donc :

$$(\forall t \in [0;1]) \ |u(t)| \leq \left(\int_0^1 1^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 u'(x)^2 dx\right)^{1/2}$$

Passant au sup à gauche, il vient :

$$\underline{\|u\|_0 \leq \|u\|_2}$$

Question 2 : Soit $u \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Clairement $\|u\|_2 \geq 0$

1. $\|\lambda u\|_2 = |\lambda| \|u\|_2$ est immédiat.
2. Comme $u \in H$, alors $u' \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$.
   $\|u\|_2 = 0 \iff \int_0^1 u'(x)^2 dx = 0$. Comme $u'^2 \in \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ et $u'^2 \geq 0$ sur $[0;1]$, on a : $u'^2 = 0$ sur $[0;1]$. Donc $u' = 0$ sur $[0;1]$ et u constante sur $[0;1]$. Or $u(0) = 0$, donc u identiquement nulle sur $[0;1]$. Réciproque immédiate.
3. Soient $u, v \in H$:
   $\|u+v\|_2^2 = \int_0^1 (u'(t) + v'(t))^2 dt = \int_0^1 u'(t)^2 dt + \int_0^1 v'(t)^2 dt + 2\int_0^1 u'(t)v'(t)dt$.
   Or par Cauchy-Schwarz, $\left|\int_0^1 u'(t)v'(t)dt\right| \leq \left(\int_0^1 u'(t)^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 v'(t)^2 dt\right)^{1/2}$.
   D'où $\|u+v\|_2^2 \leq \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + 2\|u\|_2.\|v\|_2 = (\|u\|_2 + \|v\|_2)^2$, et donc :
   $\|u+v\|_2 \leq \|u\|_2 + \|v\|_2$.

Ainsi, <u>$\|.\|_2$ est une norme sur H.</u>

Question 3 : Clairement : $(\forall u \in H) \quad \|u\|_2 \leq \|u\|_1$.
Puis $\|u\|_1^2 = \|u\|_2^2 + \int_0^1 u(t)^2 dt \leq \|u\|_2^2 + \|u\|_0^2$.
Or par 1) $\|u\|_0 \leq \|u\|_2$. D'où $\|u\|_1^2 \leq 2\|u\|_2^2$.
On en déduit que$(\forall u \in H) \quad \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq \sqrt{2}\|u\|_2$.

<u>Les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes.</u>

Question 4 : Donnons d'abord quelques rappels d'analyse fonctionnelle ...

Continuité d'une application linéaire entre deux evn

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach. On notera $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F que l'on munit de la norme $\|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup\limits_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F$.

Rappel : Une application linéaire u de E dans F 'Banach ou non) est continue ssi :

$$(\exists M > 0)(\forall x \in E) \quad \|u(x)\|_F \leq M\|x\|_E$$

ce qui équivaut par définition de $\|.\|_{\mathcal{L}_c(E,F)}$ à :

$$\|u\|_{\mathcal{L}_c(E,F)} < \infty$$

Par 1) et 3) nous obtenons que $(\forall u \in H) \quad \|u\|_0 \leq \|u\|_1$.
Cette dernière inégalité nous assure que l'identité Id est continue de $(H, \|.\|_1)$ dans $(H, \|.\|_0)$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n : \begin{cases} [0;1] \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \dfrac{\sin(n\pi t)}{n} \end{cases}$

Après calculs : $\|u_n\|_0 = \dfrac{1}{n}$, $\|u_n\|_2^2 = \dfrac{\pi^2}{2}$ et $\displaystyle\int_0^1 u_n^2(t)dt = \frac{1}{2n^2}$. D'où $\dfrac{\|u_n\|_1^2}{\|u_n\|_0^2} \equiv \dfrac{(\pi n)^2}{2} \to +\infty$ quand $n \to +\infty$

<u>Les normes $\|.\|_0$ et $\|.\|_1$ ne sont PAS équivalentes.</u>

Question 5 : Démontrer la différentiabilité d'une application entre deux evn.

Différentielle d'une application entre deux Banach

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \subset E \to F$ une application de U dans F. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire **continue** $\ell \in \mathcal{L}_c(E, F)$ telle qu'au voisinage de 0 :

$$f(a + h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|)$$

Cette application linéaire ℓ est alors unique, on l'appelle la **différentielle** de f en a, et on note $\ell = Df(a)$ ou $\ell = Df_a$.

Nous écrirons souvent $Df_a.h$ ou $Df(a).h$ plutôt que $Df(a)(h)$ ou $Df_a(h)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $\phi_p : \begin{cases} H \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \int_0^1 u^p(t)dt \end{cases}$.

Soient $u, h \in H$. Alors $u + h \in H$ et par la formule du binôme de Newton :

$$\phi_p(u + h) = \int_0^1 (u + h)^p(t)dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (u^k.h^{p-k})(t)dt$$

Soit :

$$\phi_p(u + h) = \int_0^1 (u^p(t) + pu^{p-1}(t)h(t) + h^2(t)\epsilon(t))dt$$

où ϵ est une fonction continue sur le compact $[0;1]$, donc bornée sur $[0;1]$. Notons $M = \|\epsilon\|_0$ (qui est même atteinte).

$$\phi_p(u+h) = \phi_p(u) + p\int_0^1 u^{p-1}(t)h(t)dt + \int_0^1 h^2(t)\epsilon(t)dt$$

Posons $L_u : \begin{cases} H \to \mathbb{R} \\ h \mapsto p\int_0^1 u^{p-1}(t)h(t)dt \end{cases}$

1. L_u est une application linéaire de H dans $\mathbb{R}$
2. $|\phi_p(u+h) - \phi_p(u) - L_u(h)| \leq M\|h\|_0^2 \leq M\|h\|_2^2$.
   Ainsi : $\phi_p(u+h) - \phi_p(u) - L_u(h) = o(\|h\|_2)$.
3. Enfin, $|L_u(h)| \leq p\left(\int_0^1 u^{2p-2}(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 h^2(t)dt\right)^{1/2} \leq pM^{p-1}\|h\|_0 \leq pM^{p-1}\|h\|_2$

Ainsi, ϕ_p est différentiable en n'importe quel $u \in H$ et $D\phi_p(u).h = p\int_0^1 u^{p-1}(t)h(t)dt$.

Question 6 : Où l'on retravaille la norme d'une application linéaire entre deux evn !

Application de classe $\mathcal{C}^1$

Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application de U dans F. On dit que f est **de classe** $\mathcal{C}^1$ sur U si

$$Df \;:\; a \in U \mapsto Df(a) \in \mathcal{L}_c(E,F) \;\text{ est continue}$$

Attention, en général Df n'est PAS une application linéaire.

Pour prouver que ϕ_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur H, on prouvera que pour tout $u, v \in H$: $\lim\limits_{v\to u}\|D\phi_p(v) - D\phi_p(u)\|_{\mathcal{L}_c(H)} = 0$.

Soit $u \in H$ fixé, $v \in H$ et $h \in H$ $(h \neq 0)$.

$$|D\phi_p(v).h - D\phi_p(u).h| = p\left|\int_0^1 (u^{p-1}(t) - v^{p-1}(t))h(t)dt\right|$$

D'après Cauchy-Schwarz, nous avons :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 (u^{p-1}(t) - v^{p-1}(t))h(t)dt\right| &\leq \left(\int_0^1 (u^{p-1}(t) - v^{p-1}(t))^2dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 h(t)^2dt\right)^{1/2} \\ &\leq \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_0.\|h\|_0 \\ &\leq \|u^{p-1} - v^{p-1}\|_2.\|h\|_2 \end{aligned}$$

Divisant $|D\phi_p(v).h - D\phi_p(u).h|$ par $\|h\|_2$ et passant au sup, nous obtenons que :

$$\|D\phi_p(v) - D\phi_p(u)\|_{\mathcal{L}_c(H)} \leq p\|u^{p-1} - v^{p-1}\|_2 \to 0 \;\text{ lorsque } v \to u$$

Ainsi, ϕ_p est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(H, \|.\|_2)$.