# VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

## Introduction

Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés parfaits. On peut s'intéresser à :

- la somme des deux faces obtenues,
- le plus grand des deux nombres obtenus,
- la différence entre le plus grand et le plus petit nombre obtenu,
- le produit des deux nombres obtenus, etc.

Intéressons-nous pour le moment à la somme des nombres obtenus sur la face supérieure de chacun des 2 dés.

a. Compléter le tableau suivant par la valeur de la somme des deux dés.

| Dé 1<br>Dé 2 | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | |
| **2** | | | | | | |
| **3** | | | | | | |
| **4** | | | | | | |
| **5** | | | | | | |
| **6** | | | | | | |

b. Quelles sont les différentes valeurs possibles pour cette somme ?
Compléter le tableau suivant :

| Somme | | | | | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité | | | | | | | | | | | | |

La fonction X qui à chaque résultat élémentaire de l'expérience associe la somme des deux dés porte le nom de **<u>variable aléatoire</u>**. C'est une fonction de l'univers $\Omega$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels.

Le tableau précédent définit la <u>**loi de probabilité** de X</u>.

- On notera ( X = a ) l'événement : « X prend la valeur a ».
  Rigoureusement, (X = a) est l'ensemble des $\omega$ appartenant à tels que

- De même, $(X \leq a)$ désigne

- Et $(a \leq X \leq b)$ désigne

Dans toute la suite, sauf mention du contraire, on supposera que l'univers Ω est fini et qu'une probabilité P est définie sur Ω.

## I) Variable aléatoire réelle

Définition : Définir une **variable aléatoire** sur Ω, c'est associer à chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ de Ω, un unique nombre réel noté $X(\{e_i\})$ .

Remarquons qu'une variable aléatoire n'a rien de variable, ni d'aléatoire… C'est une fonction parfaitement définie de Ω dans $\mathbb{R}$. Comme Ω est fini, X ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

Exemple 1 : On lance un œuf du haut de la tour Eiffel et on s'intéresse au nombre de… rebonds ! Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le nombre de rebonds de l'œuf. La seule valeur que peut prendre X est 0. (vous n'avez aucun doute à ce sujet !)

L'événement ( X = 0 ) est donc l'événement certain Ω.

L'événement ( X = a ) (avec a ≠ 0) est l'événement impossible $\emptyset$ .

Exemple 2 : On jette un dé à 6 faces parfaitement équilibré.
Ω = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }.
Si le résultat est un nombre pair, on gagne 2 €.
Si le résultat est 3, le gain est nul.
Si le résultat est 1 ou 5, on perd 4 €.
Soit X la variable aléatoire définie sur Ω, représentant le gain à ce jeu.
Les valeurs que peut prendre X sont : -4 ; 0 ; 2
( X = 2 ) est l'événement « le résultat est pair », c'est-à-dire { 2 ; 4 ; 6 }.

## II) Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition : Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω.
$X(\Omega)=\{x_1 ; x_2 \dots x_k\}$ désigne l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
On notera $p_i$ la probabilité de chacun des événements $(X=x_i)$, c'est-à-dire $p_i = p(X=x_i)$.
La donnée de $p_1$, $p_2$, …, $p_k$ s'appelle la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X.

Exemple : Considérons l'exemple précédent. On peut écrire la loi de probabilité de X sous la forme du tableau suivant :

| Gain $x_i$ | -4 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p(X=x_i)$ | 1/3 | 1/6 | 1/2 |

On remarque que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.
De manière générale, $\mathbf{p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1}$.

Pour avoir une idée du gain moyen du joueur, on définira…

## III) Espérance mathématique

L’espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre, noté E ( X ) que l’on définit par $E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_kx_k$, soit en notation avec le symbole $\sum$ :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_ix_i \text{ .}$$

Exemple : Avec l’exemple précédent, on a :

E( X ) = , soit E( X ) = ; Le jeu n’est pas équitable.

Si le joueur joue un grand nombre de parties, en moyenne son gain (algébrique) sera de

Remarquons que selon le problème donné, l’espérance d’une variable aléatoire X peut aussi être un nombre strictement positif ou nul.

Une question se pose : comment mesurer les écarts à la moyenne ?

## IV) Variance

Définition : La variance de la variable aléatoire X est le nombre V ( X ) défini par

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i(x_i - E(X))^2 \text{ .}$$

On a : $V(X) = \sum p_ix_i^2 - [E(X)]^2$, soit $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Exercice : Calculer V ( X ) pour l’exemple précédent.

*Remarque* : V ( X ) est toujours un nombre positif.

## V) Écart-type

**Définition** : L’écart-type de la variable aléatoire X est le nombre $\sigma(X)$ défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

*Remarque* : la variance comme l'écart-type mesurent la dispersion des valeurs prises par X autour de E(X).

**<u>Exercice 1</u>**

Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter 2 dés parfaits. On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le plus grand des 2 nombres obtenus.

1. Quelles sont les valeurs que peut prendre X ?

2. Compléter le tableau suivant par la valeur du plus grand des 2 nombres.

| Dé 1<br>Dé 2 | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | | | | | | |
| **2** | | | | | | |
| **3** | | | | | | |
| **4** | | | | | | |
| **5** | | | | | | |
| **6** | | | | | | |

3. En déduire sous la forme d'un tableau la loi de probabilité de X.
4. Calculer $P(X=1)$ et $P(X\geq 5)$ .
5. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

**<u>Exercice 2</u>**

Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

| $x_i$ | -5 | 1 | 3,5 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1/8 | 2/3 | | 1/9 |

1. Calculer $p(X = 3{,}5)$.
2. Calculer $E(X)$, $V(X)$ *et* $\sigma(X)$.

**<u>Exercice 3</u>**

On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On note Ω l'univers associé à cette expérience.

1. Décrire Ω et déterminer son cardinal.
2. On joue au jeu suivant <u>pour une mise de 2€</u> :
   - Si l'on obtient 3 faces, on gagne 5€
   - Si l'on obtient 2 faces, on gagne 3€
   - Dans les autres cas, on perd sa mise.

Soit Y la variable aléatoire définie sur Ω égale au gain du joueur.

- Quelles valeurs peut prendre Y ? (ne pas oublier la mise)
- Donner la loi de probabilité de Y sous la forme d'un tableau.
- Quel est le gain moyen du joueur par partie ?

**Exercice 4**

On effectue des tirages successifs et sans remise d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires. On arrête lorsqu'il ne reste plus que des boules de la même couleur dans l'urne. X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires.

1. Déterminez les valeurs prises par X.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer l'espérance de X.
4. Calculer l'écart-type de X.

**Exercice 5**

On dispose de deux urnes $U_1$ et $U_2$ contenant des boules indiscernables au toucher. $U_1$ contient *n* boules blanches et 3 boules noires (*n* est un entier supérieur ou égal à 1).

$U_2$ contient 2 boules blanches et 1 boule noire.

On tire au hasard une boule de l'urne $U_1$ et on la met dans $U_2$, puis on tire au hasard une boule de l'urne $U_2$ et on la met dans $U_1$ ; l'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

1. On considère l'événement A : « Après l'épreuve les urnes se retrouvent dans leur configuration de départ »

   a) Prouver que $p(A)$ peut s'écrire $p(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$ .

   b) Déterminer la limite de $p(A)$ lorsque *n* tend vers $+\infty$ .
2. On considère l'événement B : « Après l'épreuve, l'urne $U_2$ contient une seule boule blanche ».

   Vérifier que $p(B)$ peut s'écrire $p(B)=\frac{6}{4(n+3)}$ .
3. Un joueur mise 20€ et effectue une épreuve. À l'issue de cette épreuve, on compte les boules blanches contenues dans $U_2$ .
   - Si $U_2$ contient une seule boule blanche, le joueur reçoit $2n$ euros.
   - Si $U_2$ contient deux boules blanches, le joueur reçoit *n* euros.
   - Si $U_2$ contient trois boules blanches, le joueur ne reçoit rien.

   a) Expliquer pourquoi le joueur n'a aucun intérêt à jouer tant que *n* ne dépasse pas 10.

   Dans la suite, on suppose n>10 et on introduit la variable aléatoire X qui prend pour valeurs les gains algébriques du joueur.

   b) Déterminer la loi de probabilité de X.

   c) Calculer l'espérance mathématique de X.

   d) On dit que le jeu est favorable au joueur si et seulement si l'espérance mathématique est strictement positive. Démontrer qu'il en est ainsi dès lors que l'urne $U_1$ contient au moins 25 boules blanches.