Un théorème d'inversion globale

Développement d'analyse
Agrégation externe de mathématiques

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

June 29, 2025

Les sentiers mathématiques : randonnée exceptionnelle

Énoncé du développement -1

Cadre théorique - prérequis

1. Différentiabilité d'une application $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$,
2. Applications de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,
3. Théorème d'inversion locale,
4. Suites de Cauchy,
5. Algèbre linéaire et topologie en dimension finie.

Un résultat d'inversion globale

Où moyennant une condition d'ellipticité, le travail en dimension finie permet de relier le local au global !

Énoncé du développement -2

Un théorème d'inversion globale

Dans $\mathbb{R}^n$, on note $(.|.)$ le produit scalaire euclidien et $\|.\|$ la norme associée. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que il existe $k > 0$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (f(x) - f(y)|x - y) \geq k\|x - y\|^2$$

Alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Démonstration du développement

Étape 1

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (df(x)(h)|h) \geq k\|h\|^2$$

f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et on a $df(x)(h) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}$.

Soit donc $t \neq 0$: par ce qui précède, $(f(x+th)-f(x)|th) \geq kt^2\|h\|^2$.

Divisant par t^2 : $\left(\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}|h\right) \geq k\|h\|^2$.

Par continuité de $t \mapsto \left(\dfrac{f(x+th)-f(x)}{t}|h\right)$, on a en faisant tendre t vers 0 : $(df(x)(h)|h) \geq k\|h\|^2$.

Démonstration du développement

Étape 2

$df(x)$ est un isomorphisme de l'evn $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.

Soit $h \in Ker(df(x))$, alors d'après l'étape 1 : $h = 0$ et $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est injective.

Or en dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement si il est bijectif. Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^n)\, df(x)$ est bijective.

Toujours grâce au fait que nous soyons en dimension finie, $df(x)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel Normé[a] (ici de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même).

[a] Pas besoin d'utiliser le théorème de Banach ! En dimension finie, toutes les AL sont continues.

Étape 3

L'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $y \in \mathrm{im}(f) = f(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe $x \in \mathbb{R}^n$ telle que $y = f(x)$.

Comme $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $df(x)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, le **théorème d'inversion locale** nous assure l'existence de deux ouverts U_0 et V_0 de $\mathbb{R}^n$ contenant respectivement x et y tels que f soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U_0 sur V_0. De plus,
$df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1} = [df(x)]^{-1}$.

Comme V_0 est ouvert, il existe $r > 0$ tel que
$B(y; r) \subset V_0 = f(U_0) \subset \mathrm{im}(f)$.
Ainsi, l'image de f est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration du développement

Étape 4

L'image de f est un fermé de $\mathbb{R}^n$

Nous allons utiliser la caractérisation séquentielle des fermés. Soit $(f(x_n))_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathrm{Im}(f)$ convergeant vers y dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}^n$. Or par hypothèse :

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$: $(f(x_p) - f(x_q)|x_p - x_q) \geq k\|x_p - x_q\|^2$ et par Cauchy - Schwarz : $(f(x_p) - f(x_q)|x_p - x_q) \leq \|f(x_p) - f(x_q)\|.\|x_p - x_q\|$.

D'où $\|x_p - x_q\| \leq \dfrac{1}{k}\|f(x_p) - f(x_q)\|$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$ complet.

Donc il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $x_n \to x$.

Par continuité de f : $f(x_n) \to f(x)$.

Par unicité de la limite : $y = f(x)$.

D'où le résultat.

Conclusion

f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$

1. $\mathrm{Im}(f) \neq \emptyset$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R}^n$ connexe, donc $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$.
2. L'hypothèse $(\forall x, y \in \mathbb{R}^n)\, (f(x) - f(y)|x - y) \geq k\|x - y\|^2$ entraîne l'injectivité de f, ainsi f est une bijection (de classe $\mathcal{C}^1$) de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
3. D'après l'étape 3 : $(\forall y \in \mathbb{R}^n)$, f^{-1} est différentiable en y et $df^{-1}(y) = [df(f^{-1}(y))]^{-1}$.
4. Enfin, par composition d'applications continues[a], $y \mapsto [df(f^{-1}(y))]^{-1}$ est continue, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

D'où le résultat annoncé.

[a] savoir le détailler.

Un exercice similaire

Énoncé

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifie :

$$(\forall t \in \mathbb{R})\, |f'(t)| \leq \theta$$

où $\theta \in]0;1[$ est un réel fixé.

Soit $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + f(y); y + f(x)) \end{cases}$.

Alors g est bijective et g^{-1} est continue.

Peut être recasé dans les leçons . . .

1. **Leçon 204 :** Connexité. Exemples d'applications.
2. **Leçon 206 :** Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse
3. **Leçon 214 :** Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.