Théorème de Grothendieck

Développement d'analyse
Agrégation externe de mathématiques

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

June 22, 2025

Les sentiers mathématiques : randonnée exceptionnelle

Énoncé du développement -1

Cadre théorique - prérequis

1. Espaces L^p,
2. Structure Hilbertienne de L^2, orthonormalisation de Gram-Schmidt,
3. Complétude et **Théorème de Banach**,
4. Dimension finie.

Un résultat étonnant !

Dimension finie et infinie se caractérisent topologiquement dans le cadre des espaces vectoriels normés via la compacité de la boule unité fermée (**théorème de Riesz**). Nous allons démontrer dans ce qui suit une condition suffisante de "dimension-finitude" d'un sev fermé de $L^p \cap L^\infty$.

Énoncé du développement -2

Théorème de Grothendieck

Soit $I =]0;1[$ et $p \in [1;+\infty[$. Soit $S \subset L^p(I)$ un sous-espace vectoriel fermé. On suppose que $S \subset L^\infty(I)$. Alors S est de dimension finie.

Rappels et notations

1. $L^p(I)$ est muni de la norme $\|f\|_{L^p} = \left(\int_0^1 |f^p(x)|dx\right)^{\frac{1}{p}}$ que l'on notera $\|f\|_p$. Avec cette norme, $(L^p(I), \|.\|_p)$ est un espace de Banach.
2. $L^\infty(I)$ est muni de la norme $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C \mid |f(x)| \leq C \ p.p\}$ que l'on notera $\|f\|_\infty$. Avec cette norme, $(L^\infty(I), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Démonstration

Étape 1

$$(\exists M > 0)(\forall f \in S)\ \|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$$

Le but est clair : utiliser la structure Hilbertienne de $L^2(I)$ par la suite !

1. Comme $|I| = 1 < +\infty$, $L^\infty(I)$ s'injecte continûment dans n'importe quel $L^p(I)$ via Id, donc $(\exists C > 0)(\forall f \in L^p(I))\ \|f\|_p \leq C\|f\|_\infty$ (ici $C = 1$)
2. S est un fermé de $L^p(I)$ et $Id : (L^\infty(I), \|.\|_\infty) \to (L^p(I), \|.\|_p)$ est continue par ce qui précède, donc S est un fermé de $L^\infty(I)$ qui est un Banach. Donc $(S, \|.\|_\infty)$ Banach.
3. $Id : (S, \|.\|_\infty) \to (S, \|.\|_p)$ est continue et bijective, donc **d'après le théorème de Banach**, $Id^{-1} = Id$ est continue. D'où : $(\exists K > 0)(\forall f \in S)\ \|f\|_\infty \leq K\|f\|_p$.

Démonstration

Étape 1 (suite)

4. Nous allons distinguer deux cas :
   - $\underline{p > 2}$
     Soit $f \in S$: p.p $x \in I$, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$.
     D'où $|f(x)|^p \leq \|f\|_\infty^{p-2}|f(x)|^2 \leq K^{p-2}\|f\|_p^{p-2}|f(x)|^2$ par 3).
     Intégrant sur I, il vient : $\|f\|_p^p \leq K^{p-2}\|f\|_p^{p-2}\|f\|_2^2$.
     On en déduit que :
     $\|f\|_p \leq K^{\frac{p-2}{2}}\|f\|_2$. Par 3) $\|f\|_\infty \leq K^{\frac{p}{2}}\|f\|_2$.
   - $\underline{p \leq 2}$
     Comme $|I| = 1$, $L^2(I) \hookrightarrow L^p(I)$: plus précisément : $\|f\|_p \leq \|f\|_2$.
     Par 3) $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_2$.

     Posons $M = \max(K; K^{\frac{p}{2}})$.
     Alors dans tous les cas : $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_2$.

Démonstration

Étape 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. On suppose que la dimension de S est au moins égale à n. Par Gram-Schmidt, il existe une partie $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subset S$, orthonormale pour le produit scalaire usuel de L^2 :

$$< f, g >= \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Démonstration

Étape 3

Notons B la boule unité ouverte de $\mathbb{C}^n$. Soit $c = (c_1, \dots, c_n) \in B$ et $f_c = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i$. Alors $(\exists N_c \subset I)$, $|N_c| = 0$, $(\forall x \in I \setminus N_c)$ $|f_c(x)| \leq M$.

On remarque que $f_c \in S$. D'après l'étape 1, $\|f_c\|_\infty \leq M \|f_c\|_2$.
Or par construction : $\|f_c\|_2 < 1$, d'où : $\|f_c\|_\infty \leq M$.
Par définition de $\|.\|_\infty$: $|f_c| \leq M$ presque partout. Donc il existe $N_c \subset I$ de mesure nulle telle que $(\forall x \in I \setminus N_c)$ $|f_c(x)| \leq M$.

Démonstration

Étape 4

Il existe $N \subset I$, $|N| = 0$, tel que pour tout $x \in I \setminus N$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\phi_i(x)|^2 \leq M^2$ et $n \leq M^2$.

En effet :

1. B est séparable car $\mathbb{C}^n$ l'est. Soit $Q \subset B$ une partie dénombrable dense : par exemple $B \cap (\mathbb{Q}^n + i\mathbb{Q}^n)$. D'après l'étape 3 : $(\forall c \in Q)(\exists N_c \subset I, |N_c| = 0)(\forall x \in I \setminus N_c)|f_c(x)| \leq M$. On pose alors $N = \displaystyle\bigcup_{c \in Q} N_c$: N est de mesure nulle comme réunion dénombrable de parties de mesure nulle.

Démonstration

Étape 4

2. Soit $x \in I \setminus N$ quelconque et $c \in Q$. D'après l'étape précédente : $(\forall x \in I \setminus N)|f_c(x)| \leq M$.
   Or pour $x \in I \setminus N$ fixé, $\psi_x : \begin{cases} B \to \mathbb{C} \\ c \mapsto |f_c(x)| \end{cases}$ est continue.
   On étend alors le résultat à $c \in B$ par densité.
3. Soit $0 < \epsilon < 1$ et $(\forall i \in [\![1; n]\!])\ c_i = (1-\epsilon)\dfrac{\overline{\phi_i(x)}}{(\sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2)^{1/2}}$. Ainsi, $c \in B$ et $f_c(x) = (1-\epsilon)\left(\sum_{i=1}^n |\phi_i(x)|^2\right)^{1/2} \leq M$.
   Élevant au carré, intégrant sur $I \setminus N$ et faisant tendre ϵ vers 0, il vient : $n \leq M^2$.

Démonstration

Conclusion

Supposons $\dim S = +\infty$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n \leq M^2$. Absurde !
Donc la dimension de S est finie.

Leçons concernées

Peut être utilisé dans les leçons :

1. Leçon 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
2. Leçon 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
3. Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.
4. Leçon 213 : Espaces de Hilbert. Exemples d'applications (à voir ???)