QCM sur les suites numériques

Terminale spécialité maths

18 mai 2025

Table des matières

Prérequis

Ce QCM de révision, sur le thème des suites numériques utilise également toutes les notions vues au cours de l'année : limites et continuité, intégration, probabilités, etc.

1 L'énoncé du QCM

VRAI ou FAUX ?

Mais justifiez votre réponse en utilisant un théorème du cours ou en exhibant un contre-exemple !

1. Une suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ est nécessairement croissante.
   (a) VRAI (b) FAUX
2. Une suite arithmétique de raison $r \neq 0$ converge.
   (a) VRAI (b) FAUX
3. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et $u_{n+1} = -4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (u_n) converge.
   (a) VRAI (b) FAUX
4. La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n} + (-1)^n$ n'a pas de limite.
   (a) VRAI (b) FAUX
5. La suite de terme général $u_n = n + (-1)^n$ n'a pas de limite.
   (a) VRAI (b) FAUX
6. Toute suite croissante et majorée converge.
   (a) VRAI (b) FAUX
7. Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.
   (a) VRAI (b) FAUX
8. Soit (u_n) une suite convergeant vers 0, alors à partir d'un certain rang, (u_n) est de signe constant.
   (a) VRAI (b) FAUX
9. Toute suite convergente est bornée.
   (a) VRAI (b) FAUX
10. Toute suite divergente est bornée.
    (a) VRAI (b) FAUX
11. Soit f une fonction décroissante définie sur $\mathbb{R}^+$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (u_n) est décroissante.
    (a) VRAI (b) FAUX
12. Si $(u_n v_n)$ est bornée, alors (u_n) est bornée ou (v_n) est bornée.
    (a) VRAI (b) FAUX
13. La suite (u_n) de terme général $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ est croissante.
    (a) VRAI (b) FAUX
14. La suite (u_n) de terme général $u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ est convergente.
    (a) VRAI (b) FAUX
15. Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$, alors la suite de terme général $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers $f(0)$.
    (a) VRAI (b) FAUX
16. La suite de terme général $\dfrac{\sin(n)}{n}$ converge.
    (a) VRAI (b) FAUX

17. Un étudiant travaille son cours avec la probabilité de 0,8 s'il l'a travaillé le jour précédent. Il le travaille avec la probabilité de 0,5 s'il ne l'a pas travaillé le jour précédent. Soit p_n la probabilité qu'il le travaille le $n-$ième jour. Alors (p_n) vérifie la relation de récurrence : $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,5$.
    (a) VRAI (b) FAUX
18. La suite (p_n) de la question précédente converge.
    (a) VRAI (b) FAUX
19. Une suite non majorée tend nécessairement vers $+\infty$.
    (a) VRAI (b) FAUX
20. La suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 6 + u_n^3$ converge.
    (a) VRAI (b) FAUX

2 Le corrigé du QCM

1. FAUX : considérer par exemple $u_n = -2^n$.
2. FAUX : $u_n = u_0 + nr \to \pm\infty$ selon le signe de r.
3. FAUX : (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $q = -4$, donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = -3 \times (-4)^n$.
   $u_{2n} = -3 \times 16^n \to -\infty$ et $u_{2n+1} = 12 \times 16^n \to +\infty$. Contredit l'unicité de la limite d'une suite convergente.
4. VRAI : $u_{2n} = \dfrac{1}{2n} + 1 \to 1$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - 1 \to -1$.
5. FAUX : $u_n \geq n - 1 \to +\infty$, donc par comparaison $u_n \to +\infty$.
6. VRAI : c'est un théorème du cours.
7. VRAI : $u_n \to \ell \iff (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\ n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon$.
   Avec $\epsilon = \dfrac{\ell}{2}$, pour n assez grand : $u_n - \ell > -\dfrac{\ell}{2}$, et donc $u_n > \dfrac{\ell}{2} > 0$.
8. FAUX : considérer par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.
9. VRAI : c'est du cours !
10. FAUX : considérer par exemple $u_n = (-2)^n$.
11. FAUX : considérer par exemple $u_0 = 1$ et $f(x) = -x$.
12. FAUX : considérer $u_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ pair} \\ \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$ et $v_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} \text{ si } n \text{ pair (non nul)} \\ n \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$
13. FAUX : $u_n - u_{n+1} = \int_0^1 (1-x)x^n e^{-x} dx \geq 0$ (positivité de l'intégrale).
14. VRAI : $(\forall x \in [0;1])\ 0 \leq u_n \leq \int_0^1 x^n dx = \dfrac{1}{n+1} \to 0$. On conclut par le théorème d'encadrement que $u_n \to 0$.
15. VRAI : en utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité.
16. VRAI : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ -\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin(n)}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ et on conclut à l'aide du théorème d'encadrement.
17. VRAI : La formule des probabilités totales permet d'affirmer que $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,5(1 - p_n)$ i.e $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,5$.
18. VRAI : Si (p_n) converge vers ℓ, alors $\ell = 0,3\ell + 0,5$ i.e $\ell = \dfrac{5}{7}$. On vérifie ensuite que $p_{n+1} - \dfrac{5}{7} = 0,3\left(p_n - \dfrac{5}{7}\right)$. Donc $\left(p_n - \dfrac{5}{7}\right)$ est une suite géométrique de raison 0,3 et donc tend vers 0. Ainsi $p_n \to \dfrac{5}{7}$.
19. FAUX : considérer la suite de terme général $(-2)^n$, non majorée (ni minorée) et qui n'a pas de limite.
20. FAUX : On prouve par récurrence que pour tout $n \geq 0,\ 1 \leq u_n \leq u_{n+1}$ et on raisonne par l'absurde pour démontrer que (u_n) diverge.