Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Classe : Terminale spé maths Année : 2024-2025

Rappels de cours :

1. Je ne rappelle pas la notion de fonction en escalier et la manière dont nous avons défini l'intégrale de telles fonctions puis admise celle d'une fonction continue sur un segment $[a; b]$.

2. Si f est continue et positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx$ représente l'aire de la surface comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f, limitée par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$ et on pose par convention $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$.

4. **Relation de Chasles** : soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et a, b, c trois réels de I. Alors : $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

5. **Linéarité de l'intégrale** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues sur $[a; b]$. Alors $\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

6. **Positivité et croissance de l'intégrale** : Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur I et $a \leq b$ deux réels de I. Si $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$ et si $f \leq g$ sur I, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

7. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $F : [a; b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est l'unique primitive de f qui s'annule en a : $(\forall x \in [a : b])\ F'(x) = f(x)$ et $F(a) = 0$.

8. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ Une fonction continue et F une primitive quelconque de f sur $[a; b]$, alors :
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$
On note $[F(x)]_a^b$ pour $F(b) - F(a)$.

9. **Valeur moyenne d'une fonction** : Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

10. **Intégration par parties** : Soient u, v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ et dont les dérivées u' et v' sont continues sur $[a; b]$. Alors :
$$\boxed{\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx}$$

Exercice n°1

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes (les questions 4 et 5 sont plus délicates) :

1. (a) $\int_0^2 (3x^2+1)dx$ (b) $\int_0^1 \left(\frac{2}{5}x^4 - x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x - 1\right) dx$
2. (a) $\int_0^1 3xe^{x^2}dx$ (b) $\int_e^{e^2} \frac{(\ln(x))^2}{x}dx$
3. (a) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)}dx$ (b) $\int_0^1 e^{e^x+x}dx$ (c) $\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$
4. (a) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}}dx$ (b) $\int_0^1 \sqrt{x^4+x^2}dx$
5. $\int_e^{e^3} \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx$

Exercice n°2

Donner de tête la valeur des intégrales suivantes :

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)dx$
2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx$
3. $\int_0^{\pi} 2\sin(2x)dx$
4. $\int_1^e \frac{1}{x}dx$

Exercice n°3

Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue et l'équation

$$(E) \ : \ \int_0^x f(t)dt = 2x - 1$$

d'inconnue $x \in [0;1]$.

1. Démontrer que (E) possède une unique solution α.
2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près pour $f(x) = x^3$.

Exercice n°4

Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Prouver que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt = f(0)$.
Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice n°5

Le but de cet exercice est d'utiliser la croissance de l'intégrale.

1. (a) On définit la fonction tangente sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
   Justifier que tan est dérivable sur D et exprimer $\tan'(x)$ en fonction de $\tan(x)$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan(x) \geq x$.
2. Prouver de même que pour tout $x \geq 0$:
   (a) $\sin(x) \leq x$ (b) $\cos(x) \geq 1 - \frac{x^2}{2}$ (c) $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Exercice n°6

1. Prouver que pour tout réel x, on a :
$$\frac{1}{(e^x+1)^2} = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
2. Calculer l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{(e^x+1)^2}dx$.
3. Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^3}$.
4. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(e^x+1)^3}dx$.

Exercice n°7

Calculer à l'aide d'une ou de deux intégrations par parties les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \int_{-1}^1 (3-2x)e^{-x+1}dx$
2. $I_2 = \int_0^{\pi/2} e^x \cos(x)dx$
3. $I_3 = \int_1^x \ln(t)dt$
4. $I_4 = \int_1^e x^2\ln(x)dx$

Exercice n°8

Le but de cet exercice est de calculer des intégrales par récurrence.

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)} dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{(\sin(x))^n}{\cos(x)} dx$.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/3} (\sin(x))^n \cos(x) dx$.
   (b) En déduire $I_{n+2} - I_n$ en fonction de n.
2. Calculer I_1 et en déduire I_3 et I_5.
3. Justifier que la fonction f définie sur $D = \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ est une primitive de la fonction g définie sur D par $g(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$.
4. En déduire I_0, puis I_2 et I_4.

Exercice n°9

On définit la fonction tangente sur $D = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ par la relation $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. (a) Prouver que tan est dérivable sur D et exprimer $\tan'$ en fonction de tan.
   (b) Prouver que pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$: $0 \leq \tan(x) \leq 1$.

   On pose à présent $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2(x)) \tan^{2k}(x) dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis en déduire sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$$

3. (a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) Simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis prouver que $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4n+2}$.
   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$. On note : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice n°10

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln(1 + x^n)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1 + x^n)\, dx$.

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. (a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
   (b) Étudier les variations de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
   Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :

   Pour tout $x \in [0; 1]$: $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
   (b) Étudier les variations de la suite (I_n).
   (c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3. Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(1 + x) - x$$

   (a) Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   (b) En déduire le signe de g sur $[0\ ;\ +\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a :

$$\ln(1 + x^n) \leqslant x^n$$

   (c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice n°11

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}dx$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$$

1. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.
2. (a) Calculer $I_0 - I_1$.
   (b) En déduire I_1.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$.
   (b) Proposer un algorithme permettant de déterminer, pour un entier naturel n donné, la valeur de I_n.
4. Soit n un entier naturel non nul.
   On admet que si x appartient à l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1-x} \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
   (b) En déduire la limite de la suite (I_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \ldots + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$

   (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $S_n = I_0 - I_n$.
   (b) Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice n°12

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1. (a) Démontrer que la dérivée de $h; x \mapsto \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est donnée par la formule $h'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
   (b) Calculer a_0 et a_1.
2. Prouver que la suite (a_n) est décroissante, puis qu'elle converge.
3. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq a_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   En déduire la limite de (a_n).
4. (a) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(n+2)a_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1)a_n$.
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $(2n+3)a_{n+2} \leq \sqrt{2}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} na_n$.
5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = (n+1)a_n a_{n+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.
   (a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$ et vérifier que $b_n + b_{n+1} = a_{n+1}\sqrt{2}$.
   (b) En déduire l'existence et la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
   (c) En déduire finalement $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}dx$.

****
****
****
**
*

Les exercices qui suivent sont destinés aux élèves qui se destinent à des études fortement orientées maths : Licence de maths ou classes préparatoires.

Exercice n°13

Ce problème a pour but d'étudier la suite de terme général $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Étudier les variations de f_n et démontrer que pour tout $n \geq 2$, $f_{n-1}(n) = f_n(n)$.

2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Cette suite est-elle convergente ? (justifier la réponse).

3. Soit g la fonction définie sur $I = [0;1]$ par : $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$.
   a) En étudiant les variations de g, démontrer que pour tout $t \in I$:
   $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-1/4n}$

4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-1/4n}$ et en déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a :
$$u_n \leq \exp\left(-1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right)\right)$$

5. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a :
$$\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$$
   (on pourra utiliser des considérations d'aire).
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $u_n \leq \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\ln n\right)$.
   Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

6. Pour tout entier $n \geq 1$ et réel $a \geq 0$, a fixé, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$.
   a) Calculer $I_1(a)$.
   b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$, on a :
   $0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{t^n}{n!}$.
   c) En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

7. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ (on pourra utiliser 2.). Déterminer alors une nouvelle majoration de $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

8 . a) En utilisant une intégration par parties, établir une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ pour tout entier $n \geq 2$.
b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$:

$$I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \frac{a}{1!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$$

Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$?

9 . Démontrer finalement que pour tout réel $a \geq 0$, on a :

$$e^a = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$$

Exercice n°14

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on pose $I(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ et $J(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)dt$.

1. Calculer $I'(x)$ et $J'(x)$.
2. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t^2}{t^2 + \sin^2(t)}dt$. Prouver que F est impaire.
3. Pour tout réel x, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{x+2\pi} \sin(t)dt$. Prouver que F est nulle.
4. Étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \ln(t)dt$.

Exercice n°15

Soit f la fonction définie sur $D=[0;1]$ par $f(0)=0, f(1)=1$ et
$f(t)=\dfrac{t-1}{\ln(t)}$ si $0<t<1$.
On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie A) : Étude de f

1. (a) Démontrer que f est continue en 0 et en 1.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $f'(t)$.
   (c) Prouver que $f'(t)$ a le même signe que la fonction ϕ définie sur $]0;1[$ par $\phi(t)=\ln(t)-1+\dfrac{1}{t}$.
   (d) Étudier les variations puis le signe de ϕ sur $]0;1[$ et en déduire le signe de f'.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0. Que peut-on en déduire pour la tangente à $\mathcal{C}$ à l'origine O ?

3. (a) Prouver que pour tout $x \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$:

$$0 \leq \frac{1}{1-x}-(1+x) \leq 2x^2$$

   En déduire que :

$$0 \leq -\ln(1-x)-\left(x+\frac{x^2}{2}\right) \leq \frac{2x^3}{3}$$

   (b) Soit g la fonction définie sur $]0;1]$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$.
   Prouver que pour tout $h \in \left[-\dfrac{1}{2};0\right]$:

$$0 \leq g(1+h)-g(1)+\frac{h}{2} \leq \frac{2h^2}{3}$$

   En déduire que g est dérivable en 1 et préciser $g'(1)$.
   (c) En déduire que f est dérivable en 1 et prouver que $f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$ (unité graphique : 10cm)

Partie B) : Calcul de $I=\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$

Pour tout $x \in]0;1]$, on pose $I(x)=\displaystyle\int_x^1 f(t)dt$ et $J(x)=\displaystyle\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt$ (nous ne chercherons pas à les calculer).

1. (a) Soit K la fonction définie sur $]0;1]$ par $K(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{f(t)}{t}dt$.

   Exprimer $K(x)$ à l'aide de $J(x)$ puis démontrer que $K'(x) = \dfrac{1}{x}(f(x) - 2f(x^2))$.

   (b) Prouver que pour tout $x \in]0;1]$: $f(x) - 2f(x^2) = -xf(x)$.

   (c) En déduire que pour tout $x \in]0;1[$: $I(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{t-1}{t\ln(t)}dt$.

2. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \ln(-\ln(t))$ sur $]0;1[$ et en déduire que pour tout $x \in]0;1[$: $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{-1}{t\ln(t)}dt = \ln(2)$.

3. Prouver que pour tout $x \in]0;1[$ et tout $t \in]0;x[$: $0 \leq -\dfrac{1}{\ln(t)} \leq -\dfrac{1}{\ln(x)}$ et en déduire que pour tout $x \in]0;1[$: $0 \leq \left|\displaystyle\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)}dt\right| \leq \dfrac{-x}{\ln(x)}$.

4. En déduire la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 0.

5. Démontrer que pour tout $x \in]0;1]$: $I - I(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ et en déduire que $0 \leq I - I(x) \leq x$.

6. Prouver finalement que $I = \ln(2)$.