# Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Classe : Terminale spé maths Année : 2024-2025

**Rappels de cours :** Probabilités conditionnelles (révisions).

On appelle **système complet d'événements** une famille d'événements $(A_i)_{1\leq i\leq n}$

- non impossibles : pour tout $i$, $A_i \neq \emptyset$
- deux à deux incompatibles : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$
- et dont la réunion est l'événement certain : $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Soient $A$ et $B$ deux événements liés à une expérience aléatoire d'univers fini $\Omega$. On suppose que $P(A) > 0$. On appelle probabilité que $B$ soit réalisé, *sachant que* $A$ l'est, le réel de $[0;1]$ noté $P_A(B)$ et défini par :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

$P_A$ définit une nouvelle probabilité de $\Omega$ dans $[0;1]$ appelée **probabilité conditionnelle sachant** $A$. Elle quantifie la réalisation d'un événement sachant que l'événement $A$ est réalisé. Tout ce qui sort du périmètre de $A$ n'est plus comptabilisé pour calculer la probabilité de réalisation de $B$.

**Formule des probabilités totales** : Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements, avec pour tout $i$, $P(A_i) > 0$. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

**Événements indépendants** : Deux événements $A$ et $B$ sont dits $P$-**indépendants** si :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

**Formule de Bayes** : Soient $A$ et $B$ deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)}}$$

Plus généralement, si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements où tous les $P(A_i) > 0$, et $B$ de probabilité non nulle, alors pour tout $j \in [\![1;n]\!]$ :

$$\boxed{P_{A_j}(B) = \frac{P(B)P_B(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}}$$

## Exercice n°1

Trois usines A, B et C produisent des pièces dont les proportions de défectueux sont respectivement 2%, 4% et 5%. Un magasin reçoit des pièces de chacune de ces usines en proportions respectives 30%, 40% et 30%. Une fois les pièces mélangées et stockées, le gérant en prélève une au hasard.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

2. Calculez la probabilité à $10^{-4}$ près de :
   (a) tomber sur une pièce de l'usine B.
   (b) tomber sur une pièce non défectueuse provenant de l'usine A.
   (c) tomber sur une pièce défectueuse provenant de l'usine B ou sur une pièce non défectueuse provenant de l'usine C.
   (d) tomber sur une pièce défectueuse.

3. La pièce prélevée est défectueuse. Calculez la probabilité qu'elle provienne de l'usine B.

4. Les événements "Prélever une pièce défectueuse" et "prélever une pièce de l'usine B" sont-ils indépendants ? Justifier.

## Exercice n°2

On désigne par $x$ un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, $x$ % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrez que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.

2. Déterminez $x$ pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminez $x$ pour que les évènements "tirer un cube bleu" et "tirer un cube marqué d'un losange" soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

   Calculez la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

## Exercice n°3

Une urne contient neuf jetons rouges dont un est marqué "gagnant" et six jetons verts dont deux sont marqués "gagnant". On tire au hasard un jeton de cette urne et on note les événements :

- $R$ :"le jeton tiré est rouge",
- $V$ :"le jeton tiré est vert",
- $G$ :"le jeton tiré est gagnant".

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité de tomber sur un jeton vert marqué gagnant.
3. Calculez la probabilité de tomber sur un jeton gagnant.
4. Le jeton est marqué gagnant. Calculez la probabilité que ce soit un jeton rouge.
5. On tire successivement *avec remise* deux jetons de cette urne : chaque jeton vert gagnant rapporte 2€, chaque jeton rouge rapporte 5€ et chaque jeton (rouge ou vert) non marqué fait perdre 1€. On appelle $X$ la fonction (appelée *variable aléatoire*) qui donne le gain algébrique à ce jeu.
   (a) Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) Précisez les valeurs prises par $X$ (que l'on notera $x_1,\ x_2,\ldots$) et la probabilité de prendre chacune de ces valeurs sous la forme d'une fraction. On résumera ceci dans un tableau appelé *loi de probabilité* de $X$.
   (c) Calculez le gain moyen à ce jeu et son écart-type.
6. Même question que précédemment, mais en supposant le tirage *sans remise*.

## Exercice n°4

Dans une population donnée, un individu sur 8 est roux, deux roux sur trois ont les yeux bleus et 80% des individus qui ont les yeux bleus sont roux. Quelle est la proportion des individus qui ne sont pas roux mais qui ont les yeux bleus ?

## Exercice n°5

On dispose de quatre dés à 6 faces, dont un pipé qui tombe sur 1 avec probabilité 5/6 et donne la même probabilité aux autres faces. On choisit un dé parmi les quatre, on le lance $2n$ fois et on obtient $n$ fois l'entier 1.

1. Avec quelle probabilité le dé choisi est-il pipé ?
2. Conclusion ?

## Exercice n°6

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

   On considère les évènements suivants :

   - $D$ : "Le candidat est retenu sur dossier",
   - $E_1$ : "Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien",
   - $E_2$ : "Le candidat est recruté".

   (a) Modélisez la situation par un arbre de probabilités.

   (b) Calculez la probabilité de l'évènement $E_1$.

   (c) On note $F$ l'évènement : "Le candidat n'est pas recruté".
   Démontrez que la probabilité de l'évènement $F$ est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

   Calculez la probabilité qu'au moins un des cinq amis soient recruté. On arrondira à $10^{-3}$.

3. Quel est le nombre minimum $N$ de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,99$ ?

## Exercice n°7

Dans une population donnée, deux maladies $M_1$ et $M_2$ sont observables chez respectivement 1% et 4% des individus. On suppose pour simplifier qu'aucun individu n'est atteint par les deux maladies à la fois. On entreprend un dépistage systématique des deux maladies au moyen d'un test unique. Ce test est positif pour 90% des malades de $M_1$ ,90% des malades de $M_2$ et 10% des individus sains.

1. Pour un individu choisi au hasard, avec quelle probabilité le test est-il positif ?

2. Avec quelle probabilité un individu pour lequel le test est positif est-il atteint de la maladie $M_1$ ?

## Exercice n°8

On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Ces dés sont en apparence identiques mais l'un est bien équilibré et l'autre truqué. Avec le dé truqué la probabilité d'obtenir 6 lors d'un lancer est égale à $\frac{1}{3}$.

*Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.*

1. On lance le dé bien équilibré trois fois de suite et on désigne par $X$ la variable aléatoire donnant le nombre de 6 obtenus.

   (a) Quelle loi de probabilité suit la variable aléatoire $X$ ?

   (b) Quelle est son espérance ?

   (c) Calculer $P(X = 2)$.

2. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables. Et on lance le dé choisi trois fois de suite.

   On considère les évènements D et A suivants :

   - $D$ : " le dé choisi est le dé bien équilibré " ;
   - $A$ : "obtenir exactement deux 6".

   (a) Calculer la probabilité des évènements suivants :

   - choisir le dé bien équilibré et obtenir exactement deux 6 ;
   - choisir le dé truqué et obtenir exactement deux 6.

   (On pourra construire un arbre de probabilité).

   (b) En déduire que : $p(A) = \frac{7}{48}$.

   (c) Ayant choisi au hasard l'un des deux dés et l'ayant lancé trois fois de suite, on a obtenu exactement deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

3. On choisit au hasard l'un des deux dés, les choix étant équiprobables, et on lance le dé $n$ fois de suite ($n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

   On note $B_n$ l'évènement " obtenir au moins un 6 parmi ces $n$ lancers successifs".

   (a) Déterminer, en fonction de $n$, la probabilité $p_n$ de l'évènement $B_n$.

   (b) Calculer la limite de la suite $(p_n)$. Commenter ce résultat.

## Exercice n°9

Une fabrique artisanale de jouets en bois vérifie la qualité de sa production avant sa commercialisation. Chaque jouet produit par l'entreprise est soumis à deux contrôles : d'une part l'aspect du jouet est examiné afin de vérifier qu'il ne présente pas de défaut de finition, d'autre part sa solidité est testée.
Il s'avère, à la suite d'un grand nombre de vérifications, que :

- 92 % des jouets sont sans défaut de finition ;
- parmi les jouets qui sont sans défaut de finition, 95 % réussissent le test de solidité;
- 2 % des jouets ne satisfont à aucun des deux contrôles.

On prend au hasard un jouet parmi les jouets produits. On note :

- $F$ l'évènement : "le jouet est sans défaut de finition" ;
- $S$ l'évènement : "le jouet réussit le test de solidité".

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.
   (a) Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.
   (b) Démontrer que $p_{\overline{F}}\left(\overline{S}\right) = \dfrac{1}{4}$.
   (c) Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.
2. Calcul de probabilités.
   (a) Démontrer que $p(S) = 0,934$.
   (b) Un jouet a réussi le test de solidité. Calculer la probabilité qu'il soit sans défaut de finition. (On donnera le résultat arrondi au millième,)
3. Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10€, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5€. On désigne par $B$ la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $B$.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire $B$.
4. On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets.

   Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

   Calculer la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.