PRIMITIVES ET CALCUL INTÉGRAL
JE SAIS FAIRE

♣ Je sais qu'on ne dit pas « LA primitive » mais « une primitive ».

♣ Je sais donner instantanément les primitives des fonctions définies par :
$f(x)=e^x$; $f(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=x^n$ $(n\neq -1)$; $f(x)=\sin x$; $f(x)=\cos x$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

♣ Je sais que la primitivation est un problème difficile en général : on peut savoir primitiver f et g sans savoir primitiver fg , $\frac{f}{g}$ et $g\circ f$. Par contre, si l'on sait primitiver f et g , on sait primitiver $f+g$ et $k\times f$ $(k \text{ réel})$.

Exercice 1 : Donner une primitive des fonctions définies par

1) $f(x)=5x^4-2x^3+\frac{1}{2}x^2-7$ 2) $g(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}-4e^x+2\cos x+\frac{2}{x}$

♣ Je sais reconnaître et primitiver les expressions du type :
$u'(x)e^{u(x)}$; $\frac{u'(x)}{u(x)}$; $u'(x)u(x)^n$; $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ ou m'y ramener rapidement.

Exercice 2 : Donner une primitive des fonctions définies par

1) $f(x)=\frac{6x+1}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ 2) $g(x)=x^2(x^3+1)^4$ 3) $h(x)=4e^{-2x+3}$ 4) $i(x)=\frac{x+1}{x^2+2x+5}$ 5) $j(x)=\frac{1}{x\ln x}$ 6) $k(x)=\frac{\ln x}{x}$ 7) $l(x)=3xe^{-x^2}$

♣ Je sais énoncer dans son intégralité le théorème fondamental du calcul intégral et je sais l'appliquer sur des situations simples.

Exercice 3 : Dériver les fonctions définies par

1) $f(x)=\int_0^x \frac{e^t}{t+1}dt$ 2) $g(x)=\int_0^{x^2} \frac{e^t}{t+1}dt$ 3) $h(x)=\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$

♣ Je sais calculer une intégrale à l'aide des primitives usuelles. Si f est une fonction de primitive F , je sais que $[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)=\int_a^b f(t)dt$.

Exercice 4 : Calculer 1) $I=\int_0^1 xe^{x^2}dx$ 2) $J=\int_0^2 (x^3-\frac{2}{5}x^2+x-1)dx$ 3) $K=\int_e^{e^2} \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$ 4) $L(x)=\int_0^{e-1} \frac{5}{x+1}dx$ 5) $M(x)=\int_0^2 (x+\frac{1}{2})(x^2+x-4)^3dx$

♣ Je connais l'interprétation géométrique de $\int_a^b f(x)\,dx$.

♣ Je connais les propriétés de linéarité de l'intégrale et la relation de Chasles.

♣ Je connais les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale et je sais les appliquer.

Exercice 5 :

0. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x \in [0;1]$ on a : $\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leqslant \frac{1}{x+n} \leqslant \frac{1}{n}$
1. a) Calculer $\int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx$
   b) Déduire en utilisant la question 0 que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ (1) et que $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ (2)
2. On appelle u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Démontrer que la suite u est décroissante.
3. On appelle v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Démontrer que la suite v est croissante.
4. On admet que les suites u et v convergent vers une limite commune notée γ . Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-3} près en utilisant un programme écrit en langage Python. On remarquera qu'il suffit de trouver le premier entier naturel n tel que $u_n - v_n \leqslant 10^{-3}$ (pourquoi ?).