CALCUL INTEGRAL (exercices progressifs)

Rappels

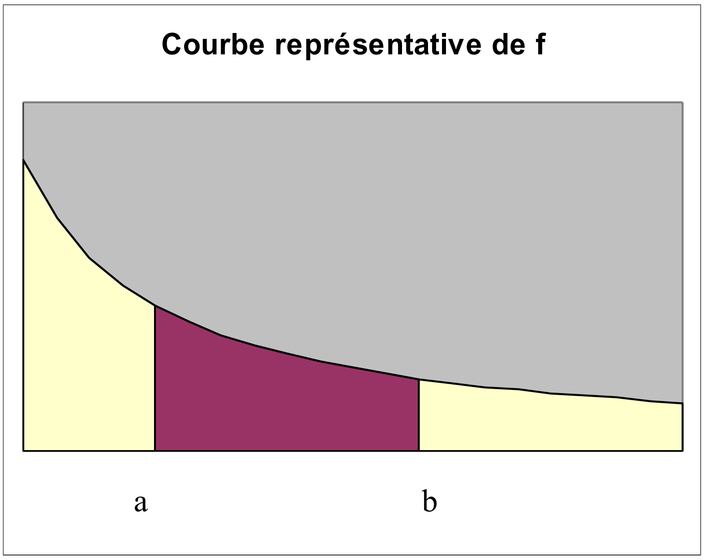
Ce qu'il faut savoir :

f désigne une fonction définie sur un intervalle I ; a et b sont deux réels appartenant à I. On suppose que a est inférieur ou égal à b.

Une primitive de *f* sur I est une fonction F dérivable sur I et vérifiant : quelque soit le réel x appartenant à I, $F'(x)=f(x)$.

Si *f* est une fonction positive sur I et *F* une primitive de *f* sur I , alors la quantité $\mathrm{F(b)-F(a)}$ représente l'aire située entre la courbe représentative de *f* et l'axe des abscisses, limitée par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

Notation : $F(b)-F(a)$ se note $\int_a^b f(x)dx$ et se lit " intégrale de *a* à *b* de *f* "



L'aire grisée comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, limitée par les droites d'équation x = a et x = b est précisément $\int_a^b f(x)dx$.
Le calcul de cette aire se ramène à un calcul de primitive pour les fonctions usuelles : x^2, $\frac{1}{x}$, ln(x), e^{ax}, etc…

Niveau 1 (la base)

1. Déterminer une primitive F de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-5x^2+1$. En déduire la valeur exacte de $\int_{-1}^{2} f(x)dx$.
2. Déterminer une primitive G de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=140e^{-1,5x}$. En déduire la valeur exacte de $\int_1^3 g(x)dx$. Interpréter géométriquement ce résultat.
3. Calculer $\int_1^e \frac{2}{x+2}dx$, $\int_1^4 \frac{3}{(x+2)^2}dx$ et $\int_1^5 (3x-1)(1,5x^2-x+1)^3 dx$.
4. Calculer $\int_1^{e-1} \frac{2}{x+1}\ln(x+1)dx$.

Niveau 2 (standard)

A) Le plan est muni d'un repère orthogonal. On donne en annexe la représentation graphique (*C*) d'une fonction *f* définie sur l'intervalle $I=[-2;4]$.

1) Par lecture graphique, déterminer les antécédents de 0. Rédiger votre démarche.
2) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq 0$.
3)
   a) Hachurer sur l'annexe l, une partie de plan dont l'aire mesure une unité d'aire.
   b) On appelle A l'aire, en unités d'aire, de la portion de plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équations $x=-1$ et $x=1$. Par lecture graphique, indiquer dans lequel de ces trois intervalles se situe la valeur de A. Rédiger votre démarche.

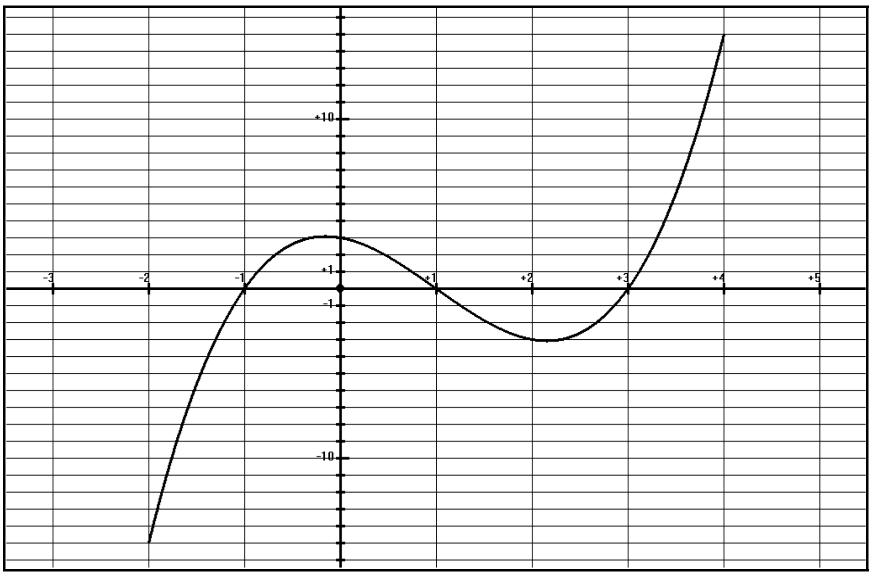
   [- 1 ; 0] ; [2 ; 6] ; [7 ; 10]

4) On admet que (C) est la courbe représentative de la fonction *f* définie sur l'intervalle I par :

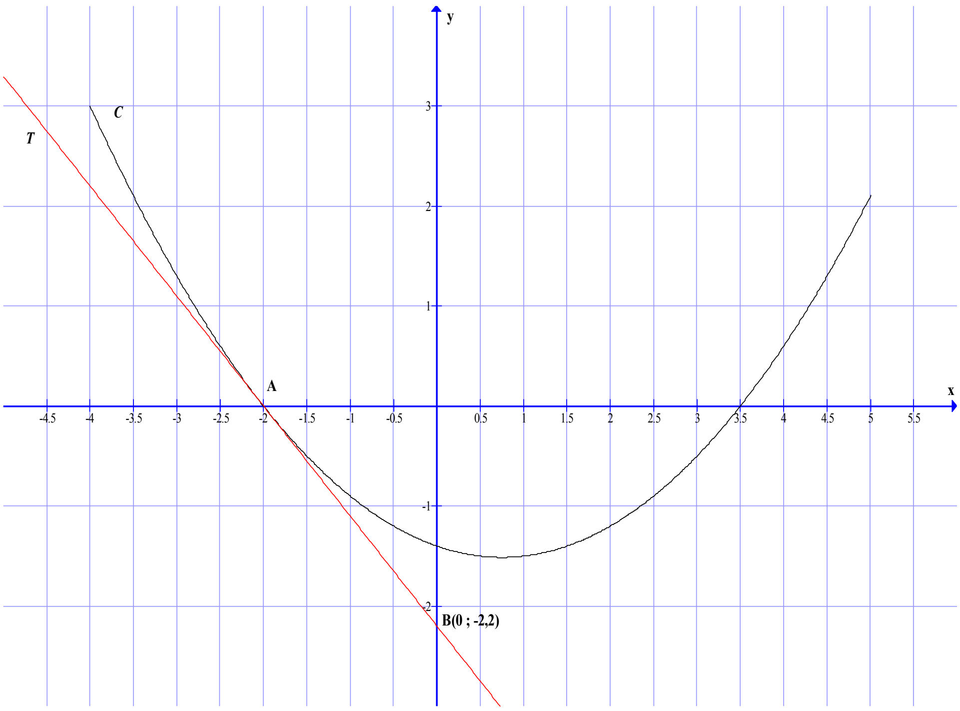
$$f(x)=x^3-3x^2-x+3 \quad .$$

   a) Déterminer une primitive *F* de f sur I.
   b) Calculer S = $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ et interpréter graphiquement le résultat.

Annexe



B) Soit *f* la fonction définie sur $D=[-4;5]$ dont on donne la courbe représentative *C* ci-dessous.



1. Quelle est l'image de -4 par f ?
2. Déterminer les antécédents de 0 par f.
3. La droite T est la tangente à C au point d'abscisse -2. Elle passe par les points A et B indiqués sur le graphique. A l'aide de ces informations, déterminer $f'(-2)$.
4. Résoudre l'équation $f'(x)=0$
5. Soit $I=\int_4^5 f(x)dx$. Alors en unités d'aire, a-t-on $I \in [0;2]$? $I \in [4;5]$?

C) Une couverture matelassée est composée de carrés de 10 cm sur 10 cm. Chaque carré comporte trois zones A_1, A_2, A_3 de couleurs différentes. La figure donnée en annexe représente un de ces carrés, où la zone A_3 est la partie du carré au située au-dessus de la courbe (C).
Un des objectifs de cet exercice est de représenter les zones A_1 et A_2.
Les questions 1), 2), 3) sont indépendantes (sauf 3) b)).

1) Les zones A_1 et A_2 sont séparées par la courbe (Γ) représentative de la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$g(x) = (10 - x)\, e^{-\frac{x}{2}}.$$

   a) Montrer que tout x de [0 ; 10], $g'(x) = \frac{1}{2}(x-12)e^{-\frac{x}{2}}$.

   b) Montrer que g ' (x) est du signe de (x -12).

   c) En déduire que le signe de g ' (x) et le sens de variation de g sur [0 ; 10].

   d) Recopier et compléter le tableau suivant :

x	**0**	**0,5**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**7**	**10**
g (x)									

Les valeurs numériques de *f* seront calculées à 10^{-2} près.

a) Construire la courbe (Γ) dans le repère xOy de l'annexe.

1) A_1 est le domaine plan limité par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. A_2 est le domaine plan limité par la courbe (Γ) et la courbe (C).

a) Soit la fonction G définie sur [0 ; 10] par $G(x) = -2(8-x)\, e^{-\frac{x}{2}}$.

Justifier que G est une primitive de g sur [0 ; 10].

b) Hachurer la zone A_1 et calculer la valeur exacte de l'aire A_1 en cm².

1) Les zones A_2 et A_3 sont séparées par la courbe (C) représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par :

$$f(x) = \frac{x^3}{200} - \frac{3x^2}{20} + 10.$$

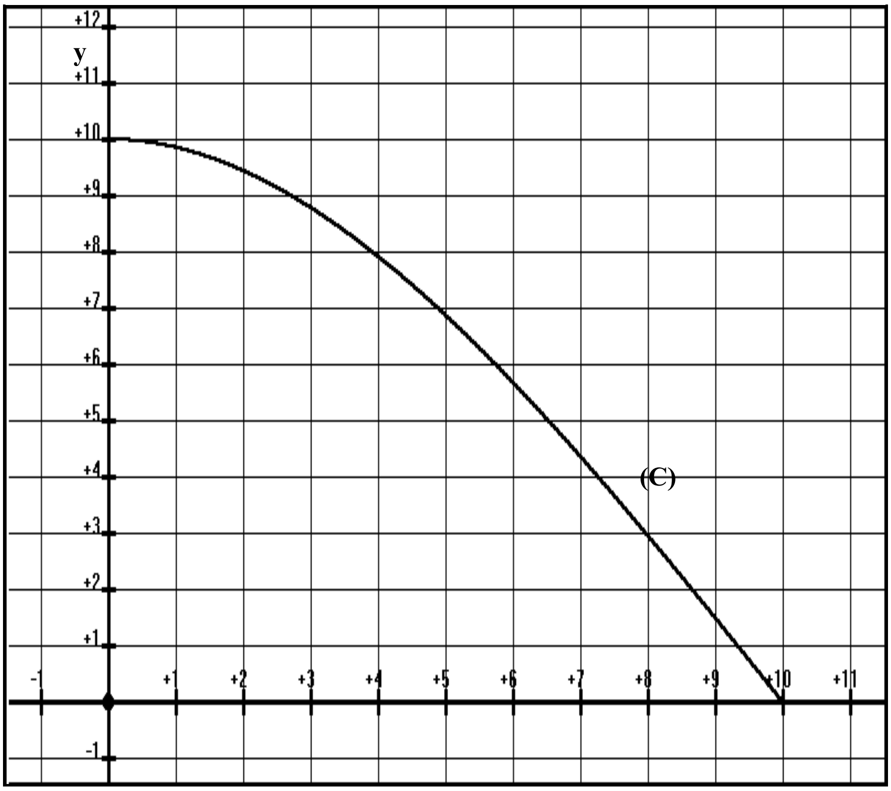
On note $J = \int_0^{10} f(x)\,dx.$.

a) Calculer J.

b) En déduire l'aire de A_3 puis l'aire de A_2.

Ces résultats seront donnés en cm², arrondis à 10^{-2} près

ANNEXE



Niveau 3 : un peu plus dur…

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a $f(x)\leq\dfrac{1}{x+1}$.
2. Déterminer une primitive G de la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$.
3. En déduire que $\int_1^2 f(x)dx\leq\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

B) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul et pour tout $x\in[0;1]$ on a : $\dfrac{1}{n}-\dfrac{x}{n^2}\leqslant\dfrac{1}{x+n}\leqslant\dfrac{1}{n}$

1. a) Calculer $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+n}dx$

   b) Déduire en utilisant la question 1 que pour $n\in\mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}\leqslant\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ (1) et que $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}$ (2)
2. On appelle u la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$. Démontrer que la suite u est décroissante.
3. On appelle v la suite définie pour $n\in\mathbb{N}^*$ par $v_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n+1)$. Démontrer que la suite v est croissante.
4. On admet que les suites u et v convergent vers une limite commune notée γ. Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près en utilisant un algorithme écrit en langage naturel.

C) On définit pour tout entier naturel n non nul l'intégrale $I_n=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{n!}(2-x)^n e^x\,dx$.

1. Calculer I_1.
2. Établir que pour tout entier naturel $n\geqslant1$: $0\leqslant I_n\leqslant\dfrac{2^n}{n!}(e^2-1)$.
3. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant1$: $I_{n+1}=I_n-\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
4. Démontrer par récurrence que : $e^2=1+\dfrac{2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+...+\dfrac{2^n}{n!}+I_n$.
5. On pose pour tout entier naturel $n\geqslant1$ $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$.

   a) Démontrer que pour tout entier naturel $n\geqslant3$: $u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}u_n$

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$: $u_n \leqslant u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

6. En déduire la limite de la suite (u_n) puis de la suite (I_n) .

Justifier enfin que : $e^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \ldots + \frac{2^n}{n!}\right)$.