DATE	**EXAMEN**	**ANNÉE ET FILIÈRE**
27 janvier 2025	Contrôle Continu	Terminale Spécialité Maths
	MODULE	**COMPOSITION DE**
	-	Mathématiques
	DURÉE DE L'ÉPREUVE	**NOM DES ENSEIGNANTS**
	2h00	Yannick LE BASTARD

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	X	NON	☐		
Documents autorisés :	Aucun					

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

Le devoir comporte 25 points, mais le total obtenu sera votre note sur 20. Toute note supérieure à 20 est ramenée à 20. Le soin est une qualité essentielle : **aérez votre copie, soulignez ou encadrez proprement vos résultats**.

Exercice n° 1. *5 points*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(2x-1)+\ln(x)=0$
2) $\ln(x+1)+\ln(x-3)=2\ln(x-2)$
3) $e^x+6e^{-x}>5$

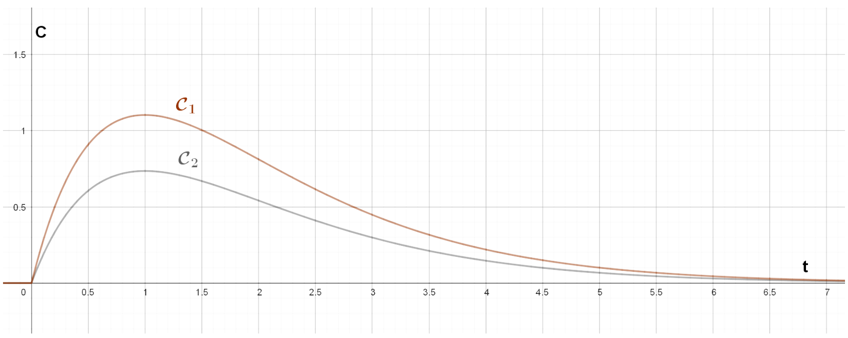
Exercice n° 2. *10 points*

Partie A

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t=0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1) La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.

À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2) Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3) Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = Ate^{-t}$ où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

   a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

   b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?

      « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

   c. La fonction f admet-elle un ou plusieurs points d'inflexion ? Justifier par un calcul.

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 2te^{-t}$.

1) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2) À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3) Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.

   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

   a. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que

      $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

   b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?

      Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5) La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

   a. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

   b. On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2te^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

   i) Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
   Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

   ii) Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Exercice n° 3. *10 points*

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f.
2) Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à $[-0,72\ ;\ -0,71]$.
3) Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-\ 1\ ;\ +\ \infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $]-\ 1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\ \infty[$ par :
$g(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1) Étude de g aux bornes de son ensemble de définition
   a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\ 1} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\ \infty} g(x)$.
2) Sens de variation de g
   a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.
   b. Montrer que $g(\alpha) = \dfrac{1}{2\alpha\,(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.
3) Tableau de variations et représentation graphique de g
   a. Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

L'exercice qui suit est **facultatif**.

Exercice n° 4. *3 points*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Justifier que l'équation $(E_n)\ :\ \ln(x) = -nx$ d'inconnue $x > 0$ possède une unique solution x_n.
2) Justifier que la suite (x_n) est strictement décroissante.
3) Prouver enfin que (x_n) converge et déterminer sa limite.

FIN DE L'EXAMEN