DATE	EXAMEN	ANNÉE ET FILIÈRE
14 février 2025	Devoir à la maison	Terminale Spécialité Maths
	MODULE	COMPOSITION DE
	-	Mathématiques
	DURÉE DE L'ÉPREUVE	NOM DES ENSEIGNANTS
	-	Yannick LE BASTARD

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	X	NON	☐		
Documents autorisés :	Le cours					

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

C'est le sujet 1 niveau Padawan

Le soin est une qualité essentielle : **aérez votre copie, soulignez ou encadrez proprement vos résultats**.

Exercice n° 1. *15 points*

Partie A : étude d'une fonction f et construction de sa courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{x}\right)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O;\vec{i};\vec{j})$.
L'unité graphique est 1 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées.

1) a. On rappelle que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   b. Vérifier que pour tout réel x : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} + \mathrm{e}^{-x}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. En déduire que la courbe admet deux asymptotes que l'on précisera.
2) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]-1\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t)$$

   a. Démontrer que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. En déduire le signe de $g(t)$ lorsque $t > 0$.
3) a. Calculer $f'(x)$ et l'exprimer en fonction de $g\left(\mathrm{e}^{x}\right)$, f' désignant la fonction dérivée de f.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.
4) Tracer les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}$ et la courbe $\mathcal{C}$.

Partie B : comportements asymptotiques d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Étudier le sens de variation de la fonction F.
2) a. Vérifier que, pour tout nombre réel t, $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t} = 1 - \dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}$ et calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t$.
   b. En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, le calcul de $F(x)$.
   c. Vérifier que $F(x)$ peut s'écrire sous les formes suivantes :

$$\begin{array}{lrcl} (1) & F(x) & = & x - \ln(1+\mathrm{e}^x) - f(x) + 2\ln 2. \\ (2) & F(x) & = & \ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right) - f(x) + 2\ln 2. \end{array}$$

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
4) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} [F(x) - x]$. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Partie C : étude d'une suite

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{-k} \ln(1+\mathrm{e}^k)$$

1) Hachurer sur la représentation graphique un domaine dont l'aire, en unités d'aire, est u_n.
2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3) a. Justifier que, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

   b. Comparer u_n et $F(n)$.
4) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice n° 2. *5 points*

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

n désigne un entier naturel quelconque.

1) Pour tout réel $x \in I =]-1;1[$ on pose : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   a) Justifier que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.
   b) Prouver par récurrence sur n que f est indéfiniment dérivable sur I et donner l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout réel $x \in I$.

2) Pour tout réel x, on pose $g(x) = (4x+1)e^{-x}$.
   Établir que pour tout réel x : $g^{(n)}(x) = e^{-x}P_n(x)$ où P_n est une fonction polynôme que l'on explicitera.

FIN DE L'EXAMEN