EXAMEN	ANNÉE ET FILIÈRE
Devoir à la maison	Terminale Spécialité Maths
MODULE	COMPOSITION DE
-	Mathématiques
DURÉE DE L'ÉPREUVE	NOM DES ENSEIGNANTS
-	Yannick LE BASTARD

DATE
14 février 2025

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	X	NON	☐		
Documents autorisés :	Le cours					

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

C'est le sujet 3 niveau maître Jedi (Obi-wan Kenobi)
Pour Mace Windu ou Yoda, me consulter !

Exercice n° 1. *8 points*

1) Soient $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(x)dx$.
   (a) Calculez $I + J$.
   (b) Démontrez que $I - J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(2x)dx$, puis en utilisant une intégration par parties (ou un changement de variable bien senti), prouvez que $I - J = 0$.
   (c) En déduire I et J.
2) Dans ce qui suit vous pourrez utiliser le résultat suivant (***premier théorème de la moyenne***) :
   Soient f, g deux fonctions continues sur $[a; b]$. On suppose de plus que g positive sur $[a; b]$. Alors il existe $c \in [a; b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt = f(c)\int_a^b g(t)dt$.
   Soit $f : [-a; a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_0^x tf(t)dt$.
3) Soient $f, g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
   (a) En étudiant la fonction $\phi : x \in \mathbb{R} \mapsto \phi(x) = \displaystyle\int_0^1 (f(t) + xg(t))^2 dt$,
   prouvez que $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)\left(\int_0^1 g^2(t)dt\right)$ (C'est ***l'inégalité de Cauchy-Schwarz***).
   (b) Démontrez qu'il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles.
   (c) Démontrez l'inégalité $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right)^2 \leq \int_0^1 f^2(t)dt$.
   (d) Donnez une condition nécessaire et suffisante afin que $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right)^2 = \int_0^1 f^2(t)dt$.
4) Soit $f : [0; 1] \to [0; 1]$ une fonction continue et (E) : $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = 2x - 1$ d'inconnue $x \in [0; 1]$.
   Démontrez que (E) possède une unique solution.
   Interprétez géométriquement par un dessin avec $f(x) = x^2$.

Exercice n° 2. *12 points*

Soit E l'ensemble des fonctions réelles continues sur $I = [0; +\infty[$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)e^{-t}dt$ **converge** i.e telle que $\displaystyle\lim_{T\to+\infty}\int_0^{T} f^2(t)e^{-t}dt < +\infty$.
En particulier, dans tous les raisonnements qui suivent, vous travaillerez d'abord avec des intégrales de bornes 0 et T, puis ferez tendre T vers $+\infty$ en justifiant que c'est licite : la limite existe et est finie.

Partie A)

1) (a) Démontrez que $E \neq \emptyset$.
   (b) Démontrez que si f et g appartiennent à E, alors $\sqrt{|fg|} \in E$ (vous pourrez utiliser l'inégalité classique $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$).
   (c) Prouvez alors que si f et g appartiennent à E, alors pour tout réel λ, $\lambda f + g \in E$.
2) (a) Prouvez que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt < +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt < +\infty$.
   (b) Prouvez que l'ensemble des fonctions polynômes restreintes à $[0; +\infty[$ est inclus dans E (vous pourrez commencer par supposer que $P(t) = t^k$ et utiliser la linéarité de l'intégrale).

Partie B)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $P_n(t) = e^t(e^{-t}t^n)^{(n)}$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième de f.

1) Prouvez que P_n est une fonction polynomiale et déterminez entièrement ses coefficients.
2) On pose pour tout polynôme Q :

$$< P, Q >= \int_0^{+\infty} e^{-t}P(t)Q(t)dt$$

   Si P est une fonction polynôme, prouvez que $< P, P_n >= (-1)^n \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^nP^{(n)}(t)dt$ (vous pourrez commencer par supposer que $P(t) = t^k$ et utiliser la linéarité de l'intégrale).
3) En déduire pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ $(n \neq m)$ que $< P_n, P_m >= 0$.
4) Calculez pour tout $n \in \mathbb{N}$ $< P_n, P_n >$.

Partie C)

Définition : Une racine a d'un polynôme P est dite d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si $P(a) = 0, P'(a) = 0, \ldots, P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(k+1)}(a) \neq 0$.

Vous pourrez également utiliser le résultat suivant sur P_n :
$(\forall n \geq 2)\ P_n(X) + XP_{n-1}(X) = (2n-1)P_{n-1}(X) - (n-1)^2P_{n-2}(X) \quad (*)$

1) (a) Quelle est la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^nP^{(n)}(t)dt$?
   (b) En déduire que que P_n admet au moins une racine strictement positive de multiplicité impaire.
2) On désigne par $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ la suite strictement croissante des racines strictement positives de multiplicité impaire de P_n.
   On pose $Q(t) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(t - t_i)$.
   (a) Prouvez que $Q(t)P_n(t)$ a un signe constant.
   (b) En déduire que P_n a n racines simples strictement positives.
3) Retrouvez ce résultat en utilisant la relation $(*)$ et prouvez que les racines de P_{n-1} séparent celles de P_n.

FIN DE L'EXAMEN