DATE
14 février 2025

EXAMEN
Devoir à la maison
MODULE
-
DURÉE DE L'ÉPREUVE
-

ANNÉE ET FILIÈRE	
Terminale	Spécialité Maths
COMPOSITION DE	
Mathématiques	
NOM DES ENSEIGNANTS	
Yannick LE BASTARD	

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	X	NON	☐		
Documents autorisés :	Le cours					

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

C'est le sujet 2 niveau jeune Jedi

Le soin est une qualité essentielle : **aérez votre copie, soulignez ou encadrez proprement vos résultats**.

Exercice n° 1. *5 points*

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

n désigne un entier naturel quelconque.

1) Pour tout réel $x \in I =]-1;1[$ on pose : $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   a) Justifier que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$.
   b) Prouver par récurrence sur n que f est indéfiniment dérivable sur I et donner l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour tout réel $x \in I$.

2) Pour tout réel x, on pose $g(x) = (4x+1)e^{-x}$.
   Établir que pour tout réel x : $g^{(n)}(x) = e^{-x}P_n(x)$ où P_n est une fonction polynôme que l'on explicitera.

Exercice n° 2. *3 points*

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'inéquation :

$$(I) \ : \ x^{3x^2+3x} \leq \sqrt{x}^{2x+2}$$

où par définition : $a^b = e^{b\ln(a)}$ pour tout réel $a > 0$.

Exercice n° 3. *12 points*

Le but du problème est l'étude simultanée de deux fonctions f et g (**partie A**), utilisées ensuite pour déterminer une valeur approchée d'un certain nombre réel noté C.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$; (unité graphique : 2 cm).

Partie A :

Soient les fonctions f et g définies sur l'ensemble des nombres réels par :

$$f(x) = x - \mathrm{e}^x \qquad \text{et} \qquad g(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$$

On appelle $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ leurs courbes représentatives respectives

1) a. Déterminer les limites des fonctions f et g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$ i.e que $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x) = 0$.
   c. Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g, sur l'ensemble des nombres réels.
2) Pour tout réel x, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
   a. Démontrer que, pour tout réel x, $h'(x) = 1 - g(x)$.
   b. En déduire le sens de variations de la fonction h sur l'ensemble des nombres réels.
   c. Démontrer que les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ admettent un unique point d'intersection, dont l'abscisse notée α, appartient à l'intervalle $[1\,;\,2]$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   d. Étudier, suivant les valeurs de x, la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
3) Tracer la droite (Δ) et les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$.
4) Pour tout réel x, on pose $\theta(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$.
   a. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\theta(x)$.
   b. En déduire, sous la forme d'une expression rationnelle en α, l'aire en cm^2 du domaine limité sur le graphique par les courbes $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \alpha$.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

1) À l'aide d'un programme en Python, déterminer un encadrement de S_{20} d'amplitude 10^{-3}.
2) a. En utilisant le tableau de variations de la fonction g définie dans la **partie A**, démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1[$:

$$\mathrm{e}^x \leq \frac{1}{1-x}$$

   b. En déduire que, pour tout nombre entier $k \geq 2$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \leq \dfrac{k}{k-1}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln\left(\dfrac{k}{k-1}\right)$.
   c. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, calculer $S_n - S_{n-1}$. En déduire que la suite (S_n) est décroissante.
3) Pour tout entier $n > 20$, on pose $u_n = S_{20} - S_n$.
   a. Vérifier que pour tout entier $n > 20$, $u_n \geq 0$.

b. En utilisant le tableau de variations de la fonction f définie dans la **partie A** ou une inégalité de convexité, démontrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;\,1]$, $1+x \leq \mathrm{e}^x$.

c. En déduire que pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\dfrac{k+1}{k} \leq \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$, puis que, pour tout nombre entier $k \geq 1$, $\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) \leq \dfrac{1}{k}$.

d. (i) Vérifier que, pour tout entier naturel $n > 20$:

$$u_n = \ln\left(\frac{n}{20}\right) - \left(\frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

(ii) Puis en raisonnant par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel $n > 20$:

$$\ln\left(\frac{n+1}{21}\right) \leq \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + \cdots + \frac{1}{n}$$

e. (i) En déduire que, pour tout entier naturel $n > 20$:

$$u_n = \ln\left(\frac{21}{20}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

(ii) puis que, pour tout entier naturel $n > 20$, $u_n \leq 0,049$.

4) On admet que la suite (S_n) est convergente de limite notée C.

a. Justifier l'encadrement $S_{20} - 0,049 \leq \mathrm{C} \leq S_{20}$.

b. Déterminer un encadrement de C d'amplitude 0,05.

FIN DE L'EXAMEN