Somme de variables aléatoires discrètes

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

23 mai 2024

Table des matières

1 Prérequis **2**

2 Somme de variables aléatoires **3**

2.1 Cas de 2 variables . . . 3

2.1.1 Couple de variables aléatoires . . . 3

2.1.2 Somme de 2 variables aléatoires . . . 4

2.2 Cas de n variables . . . 4

3 Applications à la loi binomiale **5**

Dans toute la suite, nous considérerons des variables aléatoires discrètes ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

1 Prérequis

Nous supposons connus les notions de variable aléatoire discrète, d'espérance, de variance et d'écart-type, d'événements indépendants ainsi que les notations usuelles en probabilités.
Rappelons brièvement :

Soit une expérience aléatoire dont on notera Ω l'univers des possibles. On notera également P une probabilité sur Ω.

Définition 1 :

1. Une **variable aléatoire réelle** X est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Ω. On posera $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$
3. La **loi de probabilité** de X est la donnée des $(x_i; P(X = x_i))_{1 \leq i \leq n}$. Lorsque le nombre de valeurs prises par X est petit, on la représente souvent à l'aide d'un tableau.
4. L'**espérance** de X, notée $E(X)$ est $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$. On peut l'interpréter comme la valeur moyenne prise par X.
5. La **variance** de X, notée $V(X)$ est définie par $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$.
   On a : $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - E(X)^2$.
6. L'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple 1 : On considère une urne contenant 3 boules bleues et 7 boules rouges, toutes indiscernables au toucher. On prélève simultanément 3 boules de cette urne. Une boule bleue rapporte 2€ et une boule rouge fait perdre 1€. Soit X la variable aléatoire gain (algébrique) à ce jeu. Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance, sa variance et son écart-type.

2 Somme de variables aléatoires

2.1 Cas de 2 variables

2.1.1 Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur le même univers Ω.
On pose $E_1 = X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $E_2 = Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_p\}$.

Définition 2 : La **loi conjointe** du couple (X, Y) des variables aléatoires réelles X et Y est la donnée des $(x_i; y_j)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et des probabilités $P(X = x_i \cap Y = y_j)$. On peut la représenter sous la forme d'un tableau.

Propriété 1 :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} P(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \cap Y = y_j) = 1.$
2. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $\displaystyle P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} P(X = x_i \cap Y = y_j).$
3. Pour tout $j \in [\![1; p]\!]$, $\displaystyle P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i \cap Y = y_j).$

Définition 3 : Les lois de X et de Y sont appelées les **lois marginales** du couple (X, Y).

Définition 4 : On dit que les variables aléatoires de X et Y sont **indépendantes** si $\forall (x_i, y_j) \in E_1 \times E_2, \quad P(X = x_i \cap Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$.

Exemple 2 : Avant d'être commercialisé, un fromage d'appellation «Roquefort» est soumis à des contrôles.
Le premier contrôle permet de vérifier la forme du fromage : mesures de la hauteur, du diamètre et du poids.
Le second contrôle permet de vérifier la constitution du fromage : quantité de sel et taux de matière grasse.
On définit :
La variable aléatoire X qui associe, à chaque fromage pris au hasard dans la production, le nombre de tests passés avec succès lors du premier contrôle. X prend pour valeur 0, 1, 2 ou 3.
La variable aléatoire Y qui associe, à chaque fromage pris au hasard dans la production, le nombre de tests passés avec succès lors du second contrôle. Y prend pour valeur 0, 1 ou 2.
La loi conjointe du couple (X , Y) est consignée dans le tableau suivant :

X Y polyline(43.86206,0)	0	1	2	3
0	0,01	0,01	0,02	0,03
1	0,01	0,02	0,04	0,1
2	0,01	0,02	0,12	0,62

1. Vérifier que la loi conjointe du couple (X, Y) est bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Justifier.

2.1.2 Somme de 2 variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω et a un réel.

Définition 5 :

1. On définit la variable aléatoire aX par $(aX)(\omega) = a.X(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$.
2. On définit la variable aléatoire $Z = X + Y$ par $Z(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Cette variable aléatoire est appelée la **somme** des variables aléatoires X et Y.

Théorème du transfert (admis) : Soit X une variable aléatoire réelle d'ensemble image $E = X(\Omega)$ et $\phi : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Alors : $E(\phi(X)) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)P(X = x_i)$.

Propriété 2 : Linéarité de l'espérance .
Pour tout $\omega \in \Omega$: (i) $E(aX) = aE(X)$ et (ii) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
On a comme corollaire immédiat que pour tous réels a et b : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.

Propriété 3 : Caractère quadratique de la variance et cas d'indépendance .

1. $V(aX) = a^2V(X)$
2. Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$. La réciproque est fausse.

Exemple 3 : On reprend les données de l'exemple 2.
Soit $Z = X + Y$.

1. Donner une interprétation de la variable aléatoire Z.
2. Calculer $E(Z)$ et en donner une interprétation.
3. Calculer $P(Z \geq 4)$ et en donner une interprétation.
4. On sait que lors du premier contrôle, deux tests ont été passés avec succès. Calculer la probabilité que tous les tests du second contrôle aient été réussis avec succès.

2.2 Cas de n variables

Définition 6 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles définies sur le même univers Ω. On note $E_i = X_i(\Omega)$ pour tout $i \in [\![1; n]\!]$.
On dit que $X_1, \ldots, X_n$ sont **(mutuellement) indépendantes** si pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$, on a :

$$P(X_1 = x_1 \cap \cdots \cap X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n)$$

Définition 7 : Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires réelles définies sur le même univers Ω.

1. On dit que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont **identiquement distribuées** si toutes les variables X_i suivent la même loi.
2. Un **n-échantillon** est un n-uplet $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

Propriété 4 : Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires réelles identiquement distribuées. Ce sont donc n copies d'une même variable aléatoire X. On note $M_n = \dfrac{X_1 + \dots X_n}{n}$.

1. On a $E(M_n) = E(X)$.
2. Si de plus, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors :

$$V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$$

et donc :

$$\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$$

3 Applications à la loi binomiale

Nous rappelons qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et p si X compte le nombre de succès lors de la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, dont p est la probabilité du succès.

Propriété 5 : Une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p peut s'écrire comme somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées (de paramètre p) :

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

où chaque X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété 6 : On en déduit les résultats (déjà vus) suivants :

1. $E(X) = np$
2. $V(X) = np(1-p)$
3. $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$