Primitives

Terminale spécialité Maths

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

January 15, 2025

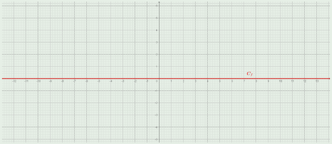

Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Définition

Soit I un **intervalle** et f une fonction définie sur I. On dit que la fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est **UNE primitive** de f sur I si F est dérivable sur I et si $F' = f$ i.e $\boxed{\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)}$.

L'exemple de base indispensable

La fonction nulle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$ admet pour primitive<u>s</u> les fonctions F constantes sur $\mathbb{R}$.



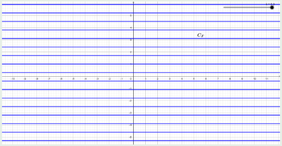


Figure: La fonction nulle $f : x \mapsto 0$ et ses primitives $F_k : x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$

Une précision importante

La notion de primitive d'une fonction f n'a de sens que sur un **intervalle** I.
Considérons par exemple la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$.
Alors la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} -3 \text{ si } x < 0 \\ 5 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable sur D, de dérivée f, mais n'est pas constante sur D (juste constante sur les intervalles $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$).

Définition et premières propriétés

Une précision importante

La notion de primitive d'une fonction f n'a de sens que sur un **intervalle** I.
Considérons par exemple la fonction f définie sur $D = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = 0$.
Alors la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} -3 \text{ si } x < 0 \\ 5 \text{ si } x > 0 \end{cases}$ est dérivable sur D, de dérivée f, mais n'est pas constante sur D (juste constante sur les intervalles $I_1 =]-\infty; 0[$ et $I_2 =]0; +\infty[$).

Théorème 1 : les primitives d'une fonction f diffèrent d'une constante.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet une primitive F sur I. Alors : les primitives de f sur I sont toutes les fonctions $F_k = F + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Quelques exemples

1. La fonction identité définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = x$ a pour primitives sur I les fonctions $F_k : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + k$, k décrivant $\mathbb{R}$.

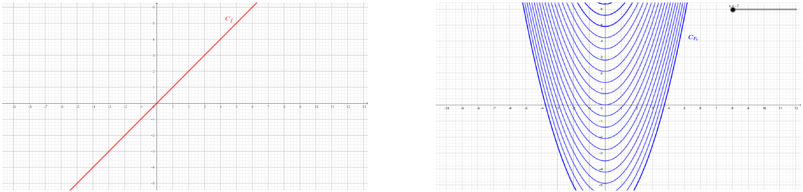
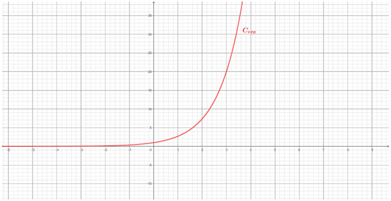


Figure: La fonction identité et ses primitives F_k ($k \in \mathbb{R}$)

2 La fonction exponentielle définie sur $I = \mathbb{R}$ a pour primitives sur I les fonctions $F_k : x \mapsto e^x + k,\ k$ décrivant $\mathbb{R}$.



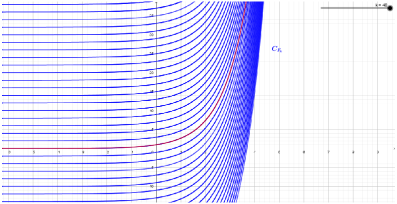


Figure: La fonction exponentielle et ses primitives $F_k,\ (k \in \mathbb{R})$

Une application en cinématique

Position du problème

On considère un point matériel M qui se déplace sur un axe gradué d'origine O. On s'intéresse à l'abscisse x du point sur l'axe en fonction du temps (variable t). On a ainsi une fonction "position" $x(t)$.

Une application en cinématique

Mouvement rectiligne uniforme

c'est un mouvement rectiligne qui s'opère à vitesse constante. Pour tout réel $t \geq 0$, $v(t) = \dfrac{dx}{dt}(t) = v_0$.

Si l'on note x_0 l'abscisse du point à l'instant $t = 0$, x est l'unique primitive de v telle que $x(0) = x_0$.

Pour tout réel $t \geq 0$: $\boxed{x(t) = v_0 t + x_0}$.

Remarque

Nous avons résolu le problème consistant à trouver une fonction x définie sur $[0; +\infty[$ et vérifiant :

$$\begin{cases} x'(t) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Mouvement rectiligne uniformément accéléré

C'est un mouvement rectiligne qui s'opère à accélération constante. Pour tout réel $t \geq 0$, $a(t) = \dfrac{dv}{dt}(t) = \dfrac{d^2x}{dt^2}(t) = a_0$.
Si l'on note x_0 (resp. v_0) l'abscisse (resp. la vitesse) du point à l'instant $t = 0$, on a : $\boxed{x(t) = a_0\dfrac{t^2}{2} + v_0 t + x_0}$.

Remarque

Nous avons résolu le problème consistant à trouver une fonction x définie sur $[0; +\infty[$ et vérifiant :

$$\begin{cases} x''(t) = a_0 \\ x'(0) = v_0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Les deux exemples précédents nous invitent à considérer que même si une fonction f possède une infinité de primitives, le fait d'avoir une condition supplémentaire, par exemple $\mathcal{C}_F$ passe par $A(x_0, y_0)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \ell$, permet de déterminer parmi toutes les primitives de f celle qui convient. Ceci équivaut précisément à trouver le k dans $F_k = F + k$ (où F est une primitive quelconque de f).

Exemples

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ telle que :

1. $F(2) = 5$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Règles opératoires sur les primitives

Primitiver, c'est DUR !

Primitiver une fonction est difficile en général ! Contrairement à la dérivation, on ne sait PAS primitiver un produit, un quotient, une composée sauf dans des cas particuliers.

Théorème 2

Dans toute la suite, I désigne un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$.

1. Toute fonction continue f sur I possède des primitives sur I.
2. **Primitive d'une somme** : Soient f et g deux fonctions définies sur I dont F et G sont des primitives, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
3. **Produit par un réel** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont F est une primitive, alors λF est une primitive de λf.

Primitiver une fonction f s'apparente donc à l'opération inverse de la dérivation, l'unicité en moins. Plutôt que de lire le tableau des dérivées usuelles à l'envers, on donne directement un :

Tableau des primitives usuelles

Fonction f	Une primitive F	Intervalle I
$f(x) = k$	$F(x) = kx$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\})$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln \lvert x \rvert$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$

Règles opératoires sur les primitives

Exemples

Déterminer dans chacun des cas une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré :

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ sur $I =]0;+\infty[$.
3. $f(x) = 5x^4 - 3x^3 + 9x^2 - 5x + 1$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{x} + 3$ sur $I =]0;+\infty[$.
5. $f(x) = 2x^4 - \dfrac{1}{x} + 3$ sur $I =]-\infty;0[$.
6. $f(x) = 3\cos x - \dfrac{5}{x^2} + 7x^3 - 1$ sur $I =]0;+\infty[$.

Règles opératoires sur les primitives

La formule de dérivation des fonctions composées : $(v \circ u)' = (v' \circ u) \times u'$ permet de primitiver de nombreuses fonctions.

u est une fonction dérivable sur I, à dérivée u' continue sur I

Fonction f	Une primitive F	Intervalle I
$f(x) = u'(x)u(x)^n \ (n \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{u(x)^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$F(x) = \ln\lvert u(x)\rvert$	$u(x) < 0$ ou $u(x) > 0$
$f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$F(x) = 2\sqrt{u(x)}$	$u(x) > 0$
$f(x) = u'(x)\exp(u(x))$	$F(x) = \exp(u(x))$	où u dérivable
$f(x) = u'(x)\cos u(x)$	$F(x) = \sin u(x)$	où u dérivable
$f(x) = u'(x)\sin u(x)$	$F(x) = -\cos u(x)$	où u dérivable

Deux exemples commentés

Bienvenue dans le jeu des ressemblances !

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{x^2}$
2. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5xe^{x^2+1}$

Solution :

1. Le terme exponentiel nous fait penser à la forme $u'(x)e^{u(x)}$. Posons donc $u(x) = x^2$; $u'(x) = 2x$. Bingo ! $f(x) = u'(x)e^{u(x)}$. Une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = e^{x^2}$.
2. Tentons la même approche en posant $u(x) = x^2 + 1$. On a aussi $u'(x) = 2x$, mais dans l'expression de $f(x)$, on a $5x$ et non $2x$. Faisons-le apparaître : $f(x) = \frac{5}{2}.(2xe^{x^2+1})$. D'où $F(x) = \frac{5}{2}e^{x^2+1}$ convient.

Règles opératoires sur les primitives

Exemples

Déterminer dans chacun des cas une primitive des fonctions suivantes sur l'intervalle I considéré :

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $I =]0;+\infty[$.
3. $f(x) = 3x^4(x^5+2)^2$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $f(x) = \dfrac{2}{x\ln x}$ sur $I_1 =]0;1[$ et sur $I_2 =]1;+\infty[$.
5. $f(x) = -\dfrac{2}{(x+1)^2} + 3\cos(2x)$ sur $I =]-1;+\infty[$.
6. $f(x) = \dfrac{5x}{2x^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.