DATE
10 janvier 2025

EXAMEN
Contrôle Continu blanc
MODULE
-
DURÉE DE L'ÉPREUVE
2h00

ANNÉE ET FILIÈRE	
Terminale	Spécialité Maths
COMPOSITION DE	
Mathématiques	
NOM DES ENSEIGNANTS	
Yannick LE BASTARD	

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	X	NON	☐		
Documents autorisés :	Aucun					

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

Le devoir comporte 24 points, mais le total obtenu sera votre note sur 20. Toute note supérieure à 20 est ramenée à 20. Le soin est une qualité essentielle : aérez votre copie, soulignez ou encadrez proprement vos résultats.

Exercice n° 1. *6 points*

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1) $\ln(3x-1) = -2$
2) a) Prouver que pour tout réel x : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x + 6)$,
   b) Puis résoudre $\ln(x) + \ln(x^2 - 5) > \ln(2) + \ln(x^2 - 3)$
3) $\ln(x+3)(x-4) = \ln(-4x-2)$
4) $e^x - 4e^{-x} = -3$

Exercice n° 2. *9 points*

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 6\dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'unité étant de 2cm sur l'axe des abscisses et de 0,5cm sur l'axe des ordonnées.

1) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) a) Étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = x^3 + 3 - 3\ln(x)$.
   b) En déduire que pour tout $x > 0$: $g(x) > 0$.
3) Calculer $f'(x)$ et en se servant de la question précédente, en déduire le sens de variation de f. Vous établirez son tableau de variation.
4) Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5) a) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la demi-parabole $\mathcal{C}_P$ d'équation $y = x^2$, $x > 0$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x^2)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
6) Tracer proprement sur le même graphique $\mathcal{C}$, T et $\mathcal{C}_P$.
7) Justifier graphiquement que pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\alpha_m > 0$. Donner pour $m = 0$ un encadrement à 10^{-1} près de α_0.

Exercice n° 3. *9 points*

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x+1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0, \text{ bref } f(0) = 0 \end{cases}$

1) Justifier brièvement que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
2) Étudier la continuité de f en 0.
3) Étudier la dérivabilité de f en 0.
4) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + x + 1$
   a) Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire les variations de g.
   b) Démontrer que g s'annule en un unique réel β et en donner un encadrement à 0,01 près.
   c) Pour tout $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire les variations de f. Vous dresserez son tableau de variation en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   d) Justifier que g est concave et en déduire que pour tout réel $x > 0$: $g(x) \leq 2x$.
5) f admet-elle un ou plusieurs points d'inflexion ? (Toute trace de raisonnement, même inabouti, sera prise en compte)

FIN DE L'EXAMEN