Un DS et son corrigé

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

15 janvier 2025

Table des matières

1 Énoncé du devoir

1.1 Exercice 1

Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $\ln(3x-1) = -2$
2. a) Prouver que pour tout réel x : $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$,
   b) Puis résoudre $\ln(x) + \ln(x^2 - 5) > \ln(2) + \ln(x^2 - 3)$
3. $\ln(x+3)(x-4) = \ln(-4x-2)$
4. $e^x - 4e^{-x} = -3$

1.2 Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 + 6\dfrac{\ln(x)}{x}$.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$, l'unité étant de 2cm sur l'axe des abscisses et de 0,5cm sur l'axe des ordonnées.

1. Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = x^3 + 3 - 3\ln(x)$.
   b) En déduire que pour tout $x > 0$: $g(x) > 0$.
3. Calculer $f'(x)$ et en se servant de la question précédente, en déduire le sens de variation de f. Vous établirez son tableau de variation.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5. a) Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la demi-parabole $\mathcal{C}_P$ d'équation $y = x^2,\ x > 0$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x^2)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

6. Tracer proprement sur le même graphique $\mathcal{C}$, T et $\mathcal{C}_P$.
7. Justifier graphiquement que pour tout réel m, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\alpha_m > 0$. Donner pour $m = 0$ un encadrement à 10^{-1} près de α_0.

1.3 Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln(x)}{x+1} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0, \text{ bref } f(0) = 0 \end{cases}$

1. Justifier brièvement que f est dérivable sur $]0;+\infty[$.
2. Étudier la continuité de f en 0.
3. Étudier la dérivabilité de f en 0.
4. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(x) + x + 1$
   a) Calculer $g'(x)$ pour $x > 0$ et en déduire les variations de g.
   b) Démontrer que g s'annule en un unique réel β et en donner un encadrement à 0,01 près.
   c) Pour tout $x > 0$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et en déduire les variations de f. Vous dresserez son tableau de variation en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
   d) Justifier que g est concave et en déduire que pour tout réel $x > 0$: $g(x) \leq 2x$.
5. f admet-elle un ou plusieurs points d'inflexion ? (Toute trace de raisonnement, même inabouti, sera prise en compte)

2 Corrigé

2.1 Exercice 1

1. $(E)\ :\ \ln(3x-1)=-2$ est bien définie si $3x-1>0 \iff x\in D=\left]\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

   Sous cette condition : $(E) \iff 3x-1=e^{-2} \iff x=\dfrac{1+e^{-2}}{3}$.

   Comme $x\in D$: $\boxed{\mathcal{S}_{(E)}=\{\dfrac{1+e^{-2}}{3}\}}$

2. a) En développant $(x-1)(x^2-x-6)$, on obtient facilement que $x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x^2-x-6)$.
   b) Posons $(I)\ :\ \ln(x)+\ln(x^2-5)>\ln(2)+\ln(x^2-3)$.

   (I) bien définie si $\begin{cases} x>0\\ x^2-5>0\\ x^2-3>0\end{cases} \iff \begin{cases} x>0\\ x\in]-\infty;-\sqrt{5}[\cup]\sqrt{5};+\infty[\\ x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[\end{cases} \iff x>\sqrt{5}$.

   Sous cette condition : $(I) \iff \ln x(x^2-5)>\ln(2x^2-6) \iff x(x^2-5)>2x^2-6 \iff x^3-2x^2-5x+6>0 \iff (x-1)(x^2-x-6)>0$.
   Or $x^2-x-6=0 \iff x=-2$ ou $x=3$. Nous pouvons alors déterminer le signe de x^3-2x^2-5x+6 dans le tableau :

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^3-2x^2-5x+6		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi, sur $]\sqrt{5};+\infty[$: $x^3-2x^2-5x+6>0 \iff x>3$. Donc $\boxed{\mathcal{S}_{(I)}=]3;+\infty[}$

3. $(E)\ :\ \ln(x+3)(x-4)=\ln(-4x-2)$ est bien définie si $\begin{cases}(x+3)(x-4)>0\\ -4x-2>0\end{cases} \iff$
   $\begin{cases} x\in]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[\\ x<-\dfrac{1}{2}\end{cases} \iff x<-3$.
   Sous cette condition, $(E) \iff (x+3)(x-4)=-4x-2 \iff x^2+3x-10=0$.
   Or $x^2+3x-10=0 \iff x=-5$ ou $x=2$. Comme $x<-3$, on a $\boxed{\mathcal{S}_{(E)}=\{-5\}}$

4. $(E)\ :\ e^x-4e^{-x}=-3$ est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :
   $(E) \iff (e^x)^2-4=-3e^x \iff (e^x)^2+3e^x-4=0$.
   Alors $(E) \iff \begin{cases}X^2+3X-4=0\\ X=e^x\end{cases} \iff \begin{cases}X=-4 \text{ ou } X=1\\ X=e^x\end{cases} \iff e^x=1 \iff$
   $x=0$. Donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E)}=\{0\}}$

2.2 Exercice 2

1. En 0 : nécessairement x tend vers 0 par valeurs supérieures.
   $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6}{x} = +\infty$, donc par produit : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6\ln(x)}{x} = -\infty$.
   Or $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$
   La droite $D\ :\ x = 0$ est asymptote verticale pour $\mathcal{C}_f$.
   En $+\infty$: Par croissance comparée $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x} = 0$ et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, on a par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2. a) g est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $g'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x} = \frac{3}{x}(x^3-1) = \frac{3(x^2+x+1)}{x}(x-1)$ du signe de $x-1$.
   On en déduit que $g'(x) < 0$ sur $]0;1[$ et $g'(x) > 0$ sur $]1;+\infty[$. Ainsi :
   g est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
   b) g a donc un minimum global en $x = 1$ et comme $g(1) = 4 > 0$, on a $\boxed{\forall x > 0\ :\ g(x) > 0}$.

3. f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $f'(x) = 2x + 6\frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{2}{x^2}g(x) > 0$ d'après 2)b). On en déduit que f est strictement croissante sur I.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	1 $\nearrow$	$+\infty$

4. L'équation réduite de la tangente T_1 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
   $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, soit $y = 8(x-1)+1$ i.e $\boxed{y = 8x-7}$

5. a) Il s'agit d'étudier sur I le signe de $f(x) - x^2 = 6\frac{\ln(x)}{x^2}$ qui est du signe de $\ln(x)$.
   Ainsi, si $x \in]0;1[$, alors $f(x) - x^2 < 0$ et $\mathcal{C}$ est en-dessous de $\mathcal{C}_P$.
   Si $x > 1$, $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_P$ et $\mathcal{C}$ coupe $\mathcal{C}_P$ au point d'abscisse 1, qui a pour coordonnées $(1,1)$.
   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x^2) = \lim\limits_{x\to+\infty} 6\frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ par croissance comparée.
   On en déduit que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_P$ sont asymptotes en $+\infty$.

6. Graphiques des trois courbes : en annexe.

7. Graphiquement : $\mathcal{C}$ et la droite $D_m\ :\ y = m$ ont un unique point d'intersection d'abscisse α_m.
   Pour $m = 0$, on lit : $\boxed{0,8 < \alpha_0 < 0,9}$.

2.3 Exercice 3

1. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, dont celle au dénominateur ne s'annule pas.

2. Soit $x > 0$: $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue en 0.

3. Soit $x > 0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x+1}$.

   Or $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$. Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, mais possède une demi-tangente verticale.

4. a) g est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $g'(x) = \dfrac{1}{x} + 1 > 0$. On en déduit que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

   b) *) D'une part, $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.
   D'autre part, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} x+1 = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
) g est **continue sur $]0;+\infty[$
   ***) g est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$.
   D'après le TVI strictement monotone, tout réel $k \in \left]\lim\limits_{x\to 0} g(x); \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right[=]-\infty;+\infty[$ a un unique antécédent par g. En particulier il existe un unique réel $\beta > 0$ tel que $g(\beta) = 0$. En utilisant la calculatrice : $0,27 < \beta < 0,28$.

   c) Posons pour tout réel $x > 0$, $u(x) = x\ln(x)$ et $v(x) = x+1$. Ainsi $u'(x) = \ln(x)+1$ et $v'(x) = 1$, d'où $f'(x) = \dfrac{(x+1)(\ln(x)+1) - x\ln(x)}{(x+1)^2} = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$.
   Comme $(x+1)^2 > 0$, on en déduit que f' est du même signe que g sur $]0;+\infty[$, et donc f est strictement décroissante sur $]0;\beta]$ et strictement croissante sur $[\beta;+\infty[$.
   De plus $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$, on a par produit : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   D'où le tableau de variations de f :

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

   d) g est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout réel $x > 0$: $g''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Donc g est concave sur $]0;+\infty[$. La courbe représentative de g est donc en-dessous de chacune de ses tangentes, en particulier en-dessous sa tangente au point d'abscisse 1, d'équation réduite $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ i.e $y = 2(x-1)+2$ i.e $\boxed{y = 2x}$.

5. f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et comme pour tout réel $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$, on a : $f''(x) = \dfrac{(x+1)^2 g'(x) - 2(x+1)g(x)}{(x+1)^4} = \dfrac{(x+1)g'(x) - 2g(x)}{x(x+1)^3}$, soit après calculs : $f''(x) = \dfrac{1 - x^2 - 2x\ln(x)}{x(x+1)^3}$ du signe de $h(x) = 1 - x^2 - 2x\ln(x)$.

Clairement, $f''(1) = h(1) = 0$, donc h s'annule en 1.

Étudions h sur $]0; +\infty[$:
h est dérivable et pour tout $x > 0$: $h'(x) = -2x - 2(\ln(x) + 1) = -2g(x)$; donc h' est du signe opposé de g sur $]0; +\infty[$.
D'après la question 4) c) $h'(x) > 0$ si $0 < x < \beta$, $h'(\beta) = 0$ et $h'(x) < 0$ si $x > \beta$.
D'où le tableau de variations de h :

x	0		β		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
h	1	$\nearrow$	$h(\beta)$	$\searrow$	$-\infty$

Comme $h(\beta) > 0$, f'' s'annule en 1 en changeant de signe, donc 1 est point d'inflexion de f et c'est le seul car h donc f'' ne s'annule pas sur $]0; \beta[$.

Annexe de l'exercice 2

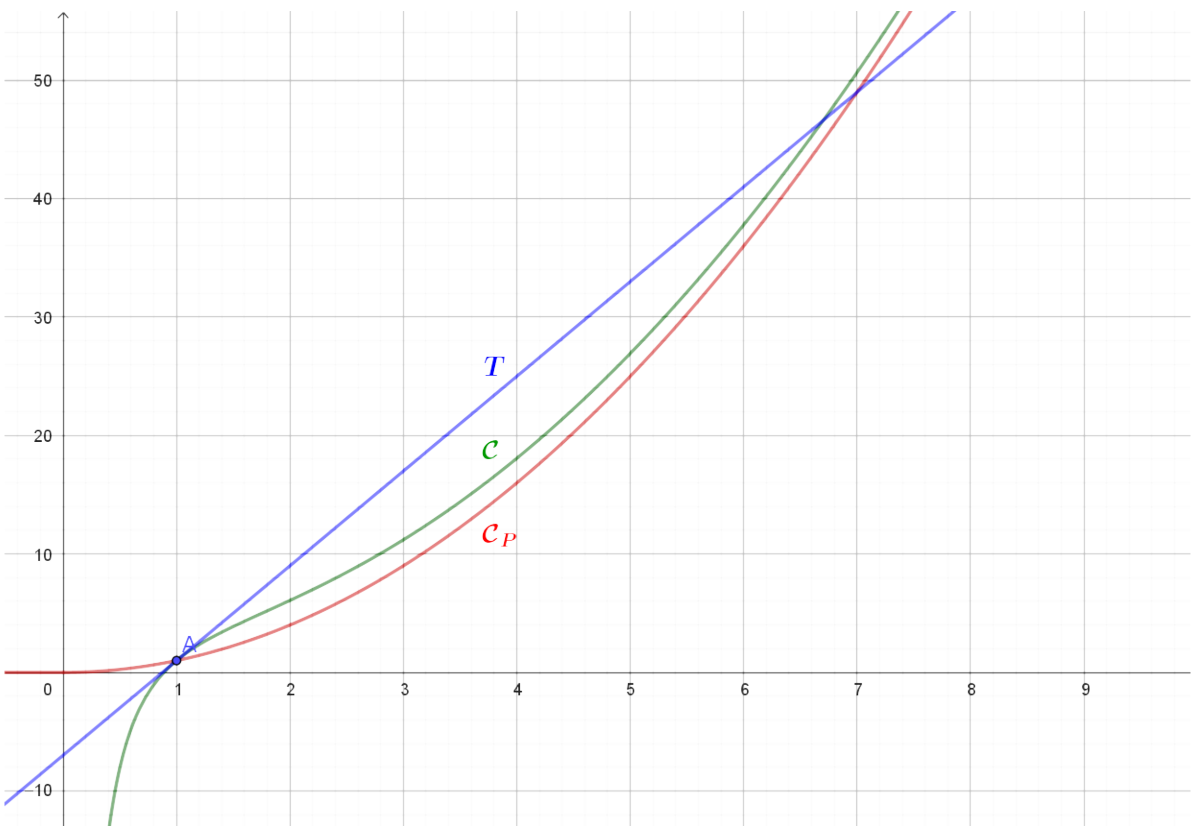

FIGURE 1 – Graphes de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_P$ et T