Fonction logarithme népérien

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

21 décembre 2024

Table des matières

Ce document va nous permettre via le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone, de construire à partir de la fonction exponentielle vue en première, la fonction logarithme népérien.
Il s'agit d'un cas particulier de fonction réciproque, comme les fonctions trigonométriques inverses : arcsinus, arccos, arctan (Hors Programme).

1 Définition de la fonction logarithme népérien

1.1 Rappels et compléments sur la fonction exponentielle

Nous avons défini en classe de première la fonction exponentielle comme étant l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f'(x) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

Nous notions provisoirement $f = \exp$. Il fut établi que :

1. Pour tous réels a et b : $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$: exp "transforme" les sommes en produits.
2. Pour tout réel a : $\exp(-a)\exp(a) = 1$.
   En particulier, pour tout réel x : $\exp(x) > 0$ et la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tous réels a et b : $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$: exp "transforme" les différences en quotients.
4. Pour tout réel a et pour tout entier relatif n : $(\exp(a))^n = \exp(na)$, relation qui s'étend en fait à tout rationnel r.

Remarques :

1. Posons $e = \exp(1)$ (le *nombre d'Euler*). Par la propriété 4 précédente, on a pour tout $r \in \mathbb{Q}$: $\exp(r) = e^r$. Nous étendons la notation à tous les réels x et nous utiliserons alors indifféremment $\exp(x)$ ou e^x pour désigner l'exponentielle du réel x.
2. La méthode d'Euler avait permis ensuite de tracer approximativement la courbe représentative de la fonction exponentielle.

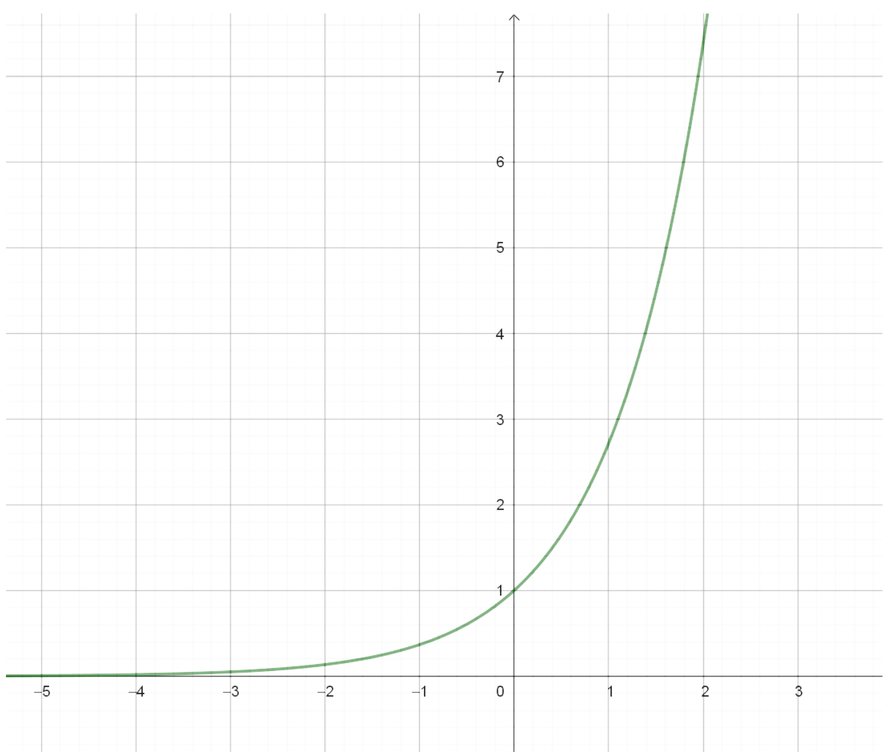

Figure 1 – Fonction exponentielle

Limites et croissances comparées :

1. La fonction exponentielle est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel x : $e^x \geq 1 + x$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

1.2 La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est **continue** et **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$, donc d'après le TVI strictement monotone, tout réel $k \in] \lim\limits_{x \to -\infty} e^x ; \lim\limits_{x \to +\infty} e^x [=]0; +\infty[$ admet un unique antécédent par exp, que l'on note $\ln(k)$.
Ceci permet de définir une fonction ln de $]0; +\infty[$ (l'ensemble des valeurs prises par exp) sur $\mathbb{R}$ (l'ensemble de définition de exp).

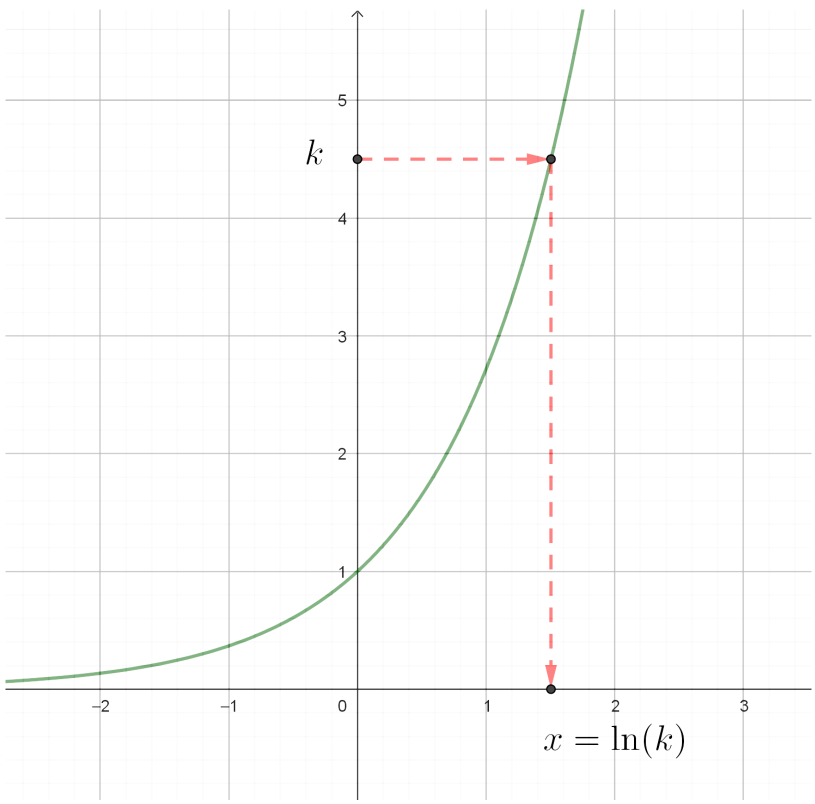

Figure 2 – De exp à ln

Définition 1 : La fonction ln dont l'existence a été justifiée précédemment s'appelle la fonction **logarithme népérien** ou fonction logarithme de base **e**.

Ainsi, par définition, pour tout réel $k > 0$: $e^{\ln(k)} = k$

Propriété 1 : Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$

2 Courbe représentative

La définition de la fonction logarithme népérien nous permet d'affirmer que :

$$\boxed{(x,k) \in \mathcal{C}_{\exp} \iff (k,x) \in \mathcal{C}_{\ln}}$$

Ainsi la courbe représentative $\mathcal{C}_{\ln}$ de la fonction ln est exactement la symétrique de la courbe représentative $\mathcal{C}_{\exp}$ de exp par rapport à la première bissectrice d'équation $D : y = x$.

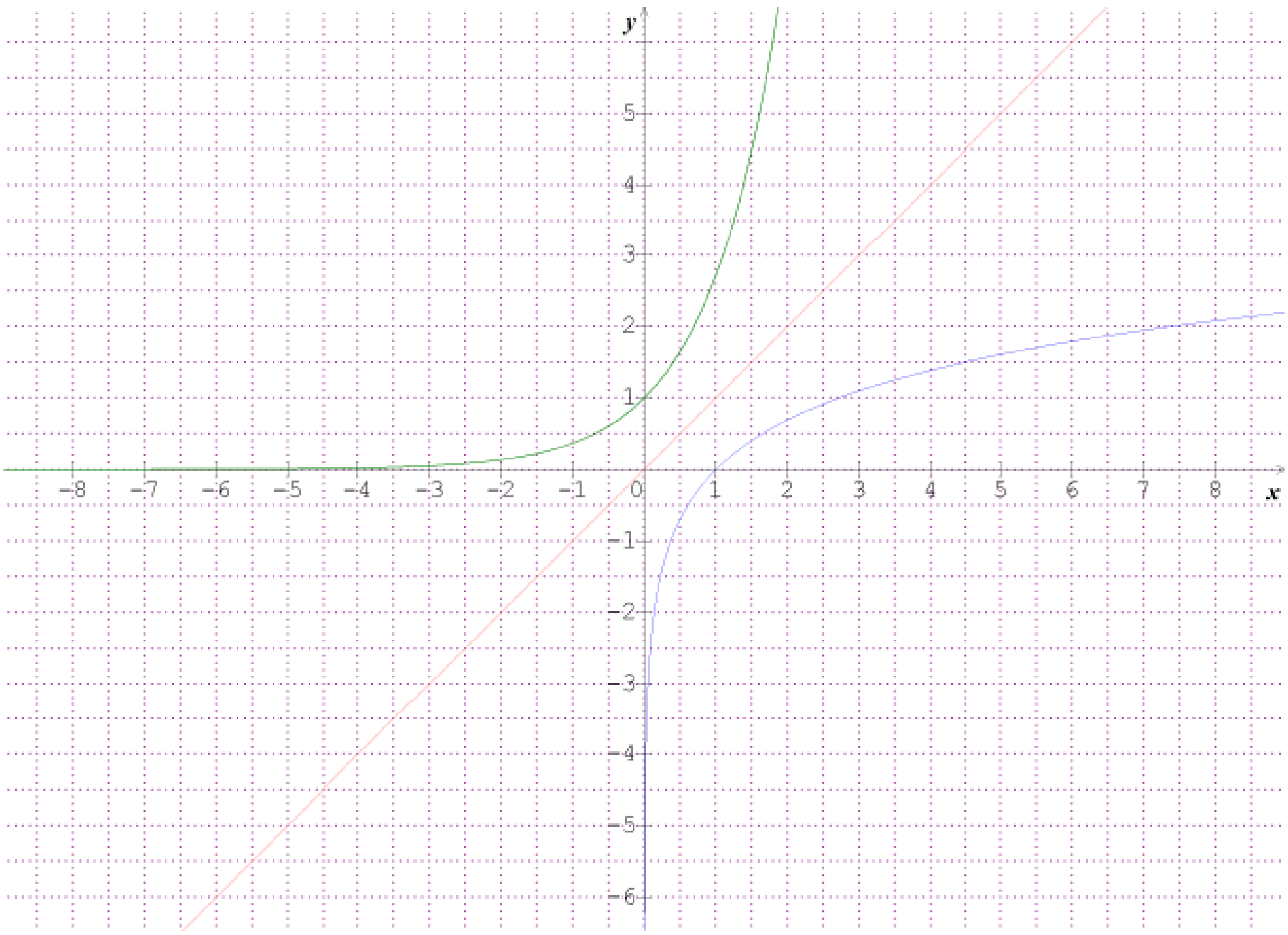

Figure 3 – exp et ln

Remarquons que $e^0 = 1$ et $\ln(1) = 0$, que $e^1 = e$ et que $\ln(e) = 1$.
Plus généralement, d'après la propriété 1 : pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$.

3 Propriétés calculatoires

exp	ln
$e^{a+b} = e^a e^b \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad (a,b \in \mathbb{R}_+^*)$
$\dfrac{1}{e^a} = e^{-a} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$
$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \quad (a,b \in \mathbb{R})$	$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \quad (a,b \in \mathbb{R}_+^*)$
$(e^a)^n = e^{na} \quad (a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z})$	$\ln(a^n) = n\ln(a) \quad (a \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{Z})$

Démonstration : Nous supposons connu le résultat suivant :
$(*)$ $e^u = e^v \iff u = v \quad (u, v \in \mathbb{R})$. Notons que par stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$, nous pouvons remplacer le signe d'égalité par n'importe quel signe d'inégalité : $<, \leq, >, \geq$.

1. Soient $a, b > 0$: d'une part $e^{\ln(ab)} = ab$ et d'autre part, $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = ab$. Ainsi, d'après $(*)$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. Il suffit de prendre $b = \dfrac{1}{a}$ et d'appliquer le résultat précédent.
3. Combiner les deux résultats précédents.
4. Récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ puis utiliser le second résultat.

Exemple 1 : Exprimer en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(5)$ le réel $A = \ln(500)$.

$500 = 4 \times 125 = 2^2 \times 5^3$, d'où $\ln(500) = \ln(2^2 \times 5^3) = \ln(2^2) + \ln(5^3) = 2\ln(2) + 3\ln(5)$.

Application : résolutions d'équations et d'inéquations

exp	ln
$e^u = e^v \iff u = v \quad (u, v \in \mathbb{R})$	$\ln(u) = \ln(v) \iff u = v \quad (u, v \in \mathbb{R}_+^*)$
$e^X = k \iff X = \ln(K) \quad (K \in \mathbb{R}_+^*)$	$\ln(X) = k \iff X = e^K \quad (K \in \mathbb{R})$

Remarque : nous pouvons remplacer le signe d'égalité par n'importe quel signe d'inégalité dans le tableau précédent. Par exemple, $\ln(X) > k \iff X > e^K$.

Exemple 2 : Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $(E_1) \ : \ e^x = 5$
2. $(E_2) \ : \ e^{-x-1} = e^{4x+4}$
3. $(E_3) \ : \ e^{2x} - 3e^x + 2 > 0$

Solution :

1. (E_1) est bien définie pour toutes valeurs de x et $e^x = 5 \iff x = \ln(5)$.
Donc $\mathcal{S} = \{\ln(5)\}$.
2. (E_2) est bien définie pour toutes valeurs de x et $e^{-x-1} = e^{4x+4} \iff -x - 1 = 4x + 4 \iff x = -1$. Donc $\mathcal{S} = \{-1\}$.
3. (E_3) est bien définie pour toutes valeurs de x et $(E_3) \iff (e^x)^2 - 3e^x + 2 > 0$.
Posons $X = e^x$. Clairement $X^2 - 3X + 2 = 0 \iff X = 1$ ou $X = 2$. De plus, $X^2 - 3X + 2 > 0 \iff X < 1$ ou $X > 2$. Or $e^x = 1 \iff x = 0$ et $e^x = 2 \iff x = \ln(2)$, d'où : $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup]\ln(2); +\infty[$.

Exemple 3 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $(E_1) \ : \ \ln(x) = -5$
2. $(E_2) \ : \ \ln((-x+2)(x-4)) = -1$
3. $(E_3) \ : \ \ln(x+3) + \ln(1-2x) = 0$

Solution :

1. (E_1) est bien définie si et seulement si $x > 0$. Sous cette condition, $\ln(x) = -5 \iff x = e^{-5}$. Donc $\mathcal{S} = \{e^{-5}\}$.
2. (E_2) est bien définie si et seulement si $(-x+2)(x-4) > 0 \iff x \in]2;4[$.
   Sous cette condition, et remarquant que $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$,
   $(E_2) \iff (-x+2)(x-4) = \frac{1}{e} \iff -ex^2 + 6ex - (8e+1) = 0$.
   Un calcul rapide amène à $x = 3 \pm \frac{\sqrt{e^2-e}}{e} = 3 \pm \sqrt{1-\frac{1}{e}}$. Les deux valeurs appartiennent à $]2;4[$, donc $\mathcal{S} = \{3 - \sqrt{1-\frac{1}{e}}; 3 + \sqrt{1-\frac{1}{e}}\}$.
3. (E_3) est bien définie si et seulement si $\begin{cases} x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases} \iff x \in \left]-3;\frac{1}{2}\right[$.
   Sous cette condition, $(E_3) \iff \ln((x+3)(1-2x)) = \ln(1) \iff (x+3)(1-2x) = 1$.
   Nous sommes donc amenés à résoudre sur $\left]-3;\frac{1}{2}\right[$ l'équation $-2x^2 - 5x + 2 = 0$.
   Aisément, cette dernière a deux solutions : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{41}}{4} \approx -2,85$ et $x_2 = \frac{-5+\sqrt{41}}{4} \approx 0,35$. Donc $\mathcal{S} = \{x_1; x_2\}$.

4 Propriétés de régularité et variations

4.1 Résultats fondamentaux

Rappelons que si f est une fonction définie sur D, $f(D)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par f quand x parcourt D : $f(D) = \{f(x),\ x \in D\}$.

exp	ln
exp est définie sur $\mathbb{R}$ et $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$	ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$
exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
exp est convexe sur $\mathbb{R}$	ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$
exp est continue sur $\mathbb{R}$	ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$
exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$	ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$

Démonstration : Nous ne démontrerons que les résultats relatifs au logarithme népérien, ceux concernant l'exponentielle étant supposés acquis.

1. Par définition de ln.
2. Soient $u, v > 0$. Par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$: $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)} \iff \ln(u) < \ln(v)$ i.e $u < v \iff \ln(u) < \ln(v)$. Donc ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soient $u, v > 0$ et $\lambda \in [0;1]$. Comme exp est convexe sur $\mathbb{R}$:
   $e^{\lambda\ln(u)+(1-\lambda)\ln(v)} \leq \lambda e^{\ln(u)} + (1-\lambda)e^{\ln(v)}$ i.e $e^{\lambda\ln(u)+(1-\lambda)\ln(v)} \leq \lambda u + (1-\lambda)v$.
   Par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$: $\lambda\ln(u) + (1-\lambda)\ln(v) \leq \ln(\lambda u + (1-\lambda)v)$. Donc ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Nous allons procéder en plusieurs étapes.
   Étape 1 : Comme exp est convexe sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_{\exp}$ est au dessus de chacune de ses tangentes, en particulier de sa tangente au point d'abscisse 0 qui a pour équation $T_0 : y = x + 1$.

Donc pour tout réel x : $e^x \geq x+1$. Par croissance de ln, nous en déduisons que pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$ (*). Relation qui équivaut à $\ln(x) \leq x-1$ pour tout $x > 0$.
Étape 2 : Nous prouvons que ln est continue en 1 i.e $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0 \iff \lim\limits_{h\to 0} \ln(1+h) = \ln(1) = 0$.
Limite à droite en 1 : Soit $h > 0$. D'après (*) : $0 \leq \ln(1+h) = \ln(1+h) - \ln(1) \leq h$.
D'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{h\to 0^+} \ln(1+h) = 0$.
Limite à gauche en 1 : soit $x \in]0;1[$. Ainsi $\ln(x) < 0$. Donc par (*) : $\dfrac{1}{x} - 1 \geq \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x) + \ln(1) > 0$. Faisant tendre x vers 1, on conclut grâce au théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(x) = 0$. D'où $\lim\limits_{h\to 0} \ln(1+h) = 0 = \ln(1)$ et ln continue en 1.
Étape 3 : Nous prouvons que ln est continue en n'importe quel réel $x_0 > 0$.
Remarquons que pour h assez petit afin que $x_0 + h > 0$: $\ln(x_0+h) - \ln(x_0) = \ln\left(1 + \dfrac{h}{x_0}\right)$ et nous sommes ramenés au cas précédent. Ce qui achève la preuve.

5. Soit $x_0 > 0$ et h assez petit afin que $x_0 + h > 0$. Remarquons que $\ln(x_0+h) - \ln(x_0) = \ln\left(1 + \dfrac{h}{x_0}\right)$.
Posons $u(h) = \ln\left(1 + \dfrac{h}{x_0}\right)$; $\lim\limits_{h\to 0} 1 + \dfrac{h}{x_0} = 1$ et par continuité de ln en 1, $\lim\limits_{x\to 1} \ln(x) = \ln(1) = 0$. Donc par composition : $\lim\limits_{h\to 0} u(h) = 0$.
Il est temps de conclure !
$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)}{1 + \frac{h}{x_0} - 1} = \frac{1}{x_0} \frac{u(h)}{e^{u(h)} - 1}.$$
Or $\lim\limits_{h\to 0} u(h) = u(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$, donc par composition, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{u(h)} - 1}{u(h)} = 1$.
Nous en déduisons que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} = \dfrac{1}{x_0}$ i.e $\ln'(x_0) = \dfrac{1}{x_0}$.

Remarque : La démonstration de la dérivabilité de ln n'est pas au programme. En revanche, vous pouvez, admettant sa dérivabilité sur $\mathbb{R}_+^*$, dériver la relation $e^{\ln(x)} = x$. Nous obtenons directement (formule de dérivation des fonctions composées) que pour tout réel $x > 0$: $e^{\ln(x)} \times \ln'(x) = 1$ i.e $x \ln'(x) = 1$ et donc $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

4.2 Dérivée logarithmique

Théorème : Soit u une fonction dérivable et prenant des valeurs strictement positives sur un intervalle I. Alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$: $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

La démonstration, se basant sur la dérivation des fonctions composées, ne pose aucune difficulté.

Exemple 4 : Déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$.

Solution : $u : x \mapsto e^{2x} - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $u' : x \mapsto 2e^{2x}$, mais f est dérivable si et seulement si $e^{2x} - 1 > 0 \iff e^{2x} > 1 \iff x > 0$.

Ainsi, pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}$.

4.3 Autres logarithmes

Définition 2 : Soit a un réel strictement positif différent de 1. On appelle fonction logarithme de base a la fonction $\log_a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
La fonction logarithme de base 10 (logarithme décimal) est souvent notée log plutôt que $\log_{10}$.

Remarque : le logarithme de base a a les mêmes propriétés algébriques que le logarithme népérien.
Remarquons que $\log_a(a) = 1$ et que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.
Attention ! Si $a \in]0; 1[$, la fonction $\log_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

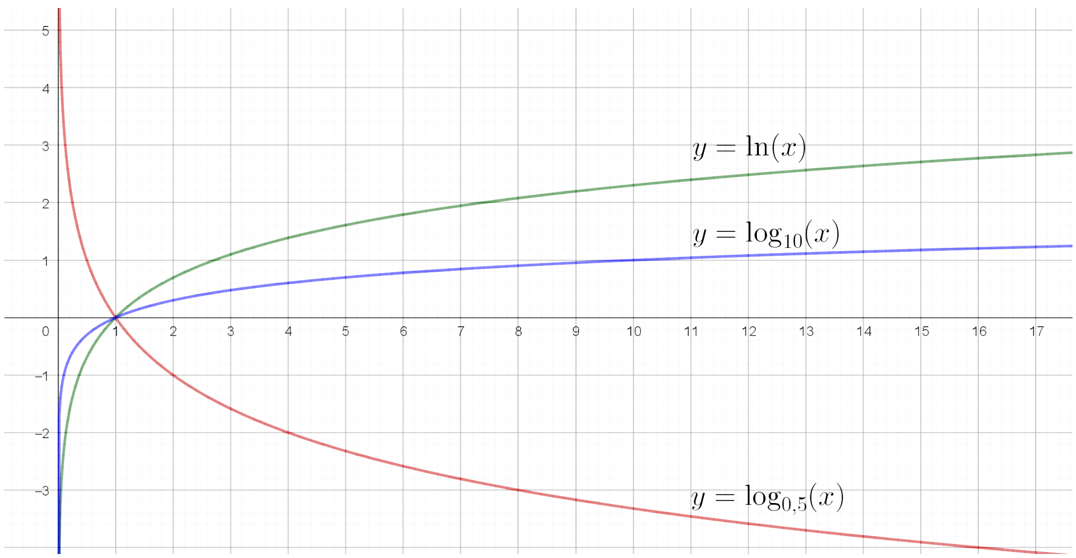

FIGURE 4 – logarithmes de différentes bases

Le logarithme décimal a eu une grande importance dans les calculs numériques avant l'arrivée des calculatrices.
Ce logarithme est très utilisé en sciences expérimentales (acoustique, échelle de Richter en géologie, pH en chimie) et en sciences humaines (loi de Fechner).

5 Limites et croissances comparées

Théorème :

1. La fonction ln est (strictement) convave sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout réel $x > -1$: $\ln(1 + x) \leq x$.
3. $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$
6. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0^-$

6 Exercices

Exercice 0 : Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $A = \ln(e) - 3\ln(e^4) + 5\ln(1)$
2. $B = \ln(3e) - 3\ln(e^2) + 6\ln(1)$

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $e^x = 4$
2. $e^{3x-1} = 2$
3. $e^{5x^2} = 2$
4. $e^{3x-1} = e^{x^2}$
5. $e^{-x+1} = (e^x)^2$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$
2. $\begin{cases} e^x - e^{2y} = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$

Exercice 3 : Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x) = 2$
2. $\ln(3x) = -4$
3. $\ln(-5x + 1) = 3$
4. $\ln(2x^2) = 5$
5. $\ln(x^2) = 0$
6. $\ln(3x - 1) = \ln(-2x)$

Exercice 4 : Résoudre les équations ou inéquations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $\ln(x - 2) + \ln(x + 3) = 2$
2. $2\ln(2) + \ln(x^2 - 1) = \ln(4x - 1)$
3. $\ln(x - 2) - \ln(x - 3) = 1$
4. $\ln(x) + \ln(x + 3) = 2\ln(2)$
5. $\ln(x + 1) + \ln(x + 5) = \ln(96)$
6. $\ln|x + 1| + \ln|x + 5| = \ln(96)$
7. $\ln(x + 1) + \ln(x - 3) - 2\ln(x - 2) = 0$
8. $\ln(x^2 + 3) - \ln(2x - 3) = \ln(x + 1)$
9. $\ln(x^2 + 3) = \ln[(2x - 3)(x + 1)]$
10. $\ln[(x + 3)(x - 4)] = \ln(-4x - 2)$
11. $\ln\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right) < \ln(x + 1)$
12. $(\ln(x))^2 + 3\ln(x) - 4 = 0$
13. $\ln(x) + \ln(x^2 - 5) > \ln(2) + \ln(x^2 - 3)$
14. $\cos(\ln(x)) = 0$

15. $\ln(\cos(x)) = 0$
16. $\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^2) = 2\ln(6) \\ e^x = \dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$
17. $\ln(3x^2 - x) \leq \ln(x+1)$
18. $\begin{cases} \ln(x) + 2\ln(5) = \ln(12) - \ln(y) \\ x + y = \dfrac{7}{5} \end{cases}$
19. $\begin{cases} \ln(x) + 2\ln(y) = \ln(m) \\ x + y = 2 - m \end{cases}$ où m est un paramètre réel.
20. $2\ln^2(2x) - 5\ln(2x) + 3 \leq 0$

Exercice 5 : Étudier la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Exercice 6 : Démontrer que les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien possèdent deux tangentes communes.

Exercice 7 : Déterminer les limites des fonctions qui suivent :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^3}$ en $+\infty$.
2. $g(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{3x-1}{3x+1}}\right)$ en $+\infty$
3. $h(x) = x^2\ln(x^3)$ en 0.
4. $i(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ en $+\infty$
5. $j(x)\dfrac{\ln(x^2+1)}{2x+1}$ en $+\infty$
6. $k(x) = \dfrac{(\ln(x))^2}{x}$ en $+\infty$
7. $\ell(x) = \ln(x)\ln(x+1)$ en 0
8. $m(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{x - e}$ en e
9. $n(x) = \sqrt{x}\ln^3(x)$ en 0
10. $o(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{x - 2}$ en 2

Exercice 8 : On place une somme S au taux annuel (intérêts composés) de 4,5%. Au bout de combien de temps la somme aura-t-elle doublé ?

Exercice 9 : Prouver que pour tous réels strictement positifs a et b (avec $a \neq b$) : $\ln(a+b) > \ln(2) + \dfrac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b))$.

Exercice 10 : Déterminer l'ensemble de définition puis la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Problème : Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $]0;+\infty[$.

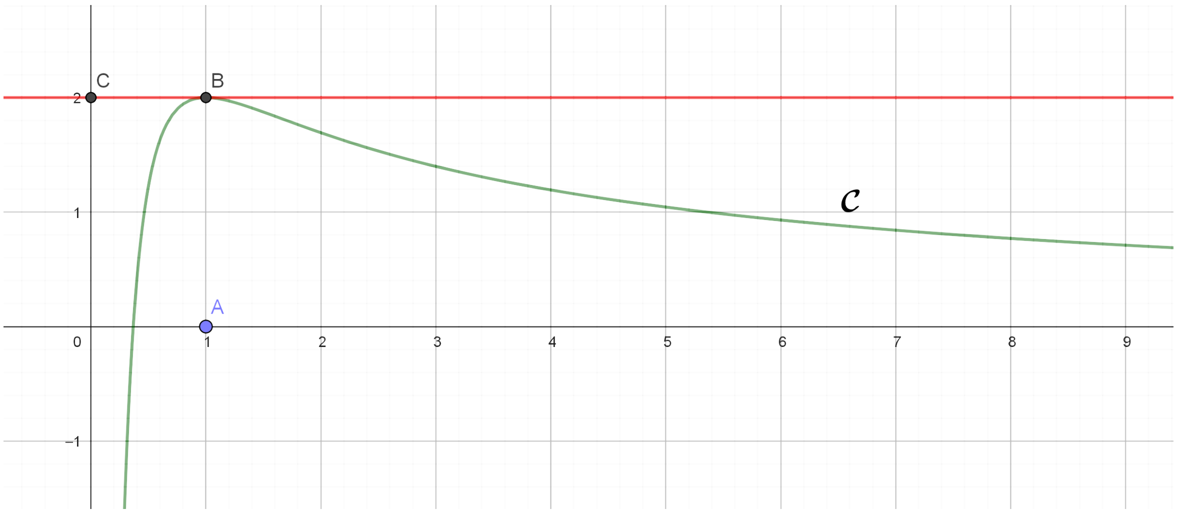

FIGURE 5 – courbe $\mathcal{C}$

On dispose des informations suivantes :

— Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives $(1,0);(1,2)$ et $(0,2)$.

— $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B.

— Il existe deux nombres réels strictement positifs a et b tels que pour tout nombre réel $x > 0$: $f(x) = \dfrac{a + b\ln(x)}{x}$.

1. a) En utilisant le graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.
   b) Vérifier que pour tout $x > 0$: $f'(x) = \dfrac{(b-a) - b\ln(x)}{x^2}$.
   c) En déduire les réels a et b.
2. a) Justifier que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln(x)$.
   b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   c) En déduire le tableau de variations de f.
3. a) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution α dans l'intervalle $]0;1]$. En donner un encadrement à 10^{-2} près.
   b) En utilisant un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel $\beta > 1$ tel que $f(\beta) = 1$. Déterminer l'entier n tel que $n < \beta < n+1$.