Initiation à la modélisation : épisode 1

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

31 décembre 2024

Table des matières

Ce petit document inaugure une série de cinq articles scientifiques à portée des lycéens et des étudiants en BTSA qui se destinent à la classe passerelle ATS Bio ou à des études de sciences naturelles ; il propose modestement quelques situations de modélisation en dimension 1 de phénomènes continus intervenant en physique ou biologie-écologie. Leur résolution théorique explicite ou leur analyse numérique n'est pas le but principal. **Nous nous contentons ici essentiellement du passage délicat de l'observation à l'écriture mathématique.**
Leur modélisation probabiliste sera aussi abordée avec le concours du logiciel Python. Une bibliographie / webographie est à disposition du lecteur pour qui souhaite se lancer dans cette passionnante aventure de modéliser le réel, certes de manière très simplifiée. Après tout, la carte n'est pas le territoire ! Un complément théorique sur la notion de diffusion à destination des enseignants ou des plus curieux est prévu en fin de document.

1 Prérequis

Nous ne supposons pas le lecteur totalement novice en ce qui concerne les outils mathématiques fondamentaux vus dans le secondaire : nombre dérivé et fonction dérivée, fonction exponentielle, logarithme népérien, primitives et intégration, équations différentielles linéaires du premier ordre ; ce qui nous mène à un niveau normalement acquis à l'issue d'un cours de *terminale spécialité maths ou maths complémentaires.*
L'année de BTSA est très riche en contenu pratique, ce qui est un plus indéniable pour appréhender la "*déraisonnable efficacité des mathématiques*", mais amène à s'éloigner de leur aspect théorique, pourtant nécessaire pour justement mieux comprendre ce qui lie théorie et pratique.
Ce papier a pour but de combler cette lacune pour l'étudiant qui voudra bien se replonger avec abnégation et sérieux dans ses cours du secondaire, et surtout développer son intuition sur la notion de dérivée en tant que taux d'accroissement (au sens algébrique) ponctuel pour modéliser des phénomènes on ne peut plus concrets ! Il ou Elle n'en sera que gagnant !

1.1 L'interprétation de la dérivée

La notion de **nombre dérivé** est abordée dès la classe de première et joue un rôle central dans le programme d'analyse mathématique du secondaire. Mais c'est aussi un outil indispensable en sciences physiques, en sciences du vivant, en économie, etc., car décrivant un **taux de variation instantané.** Il convient ici de revenir sur son interprétation intuitive (aspect local) : vitesse instantanée, densité de population ponctuelle, et ensuite de s'attarder sur la notion de fonction dérivée (aspect global) dont le signe nous indique les variations de la fonction dont elle est issue.

Théorème et définition : Soit f une fonction définie sur I (I désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles). Soit a un réel appartenant à I. On dit que f est **dérivable** en a s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$. Ce réel ℓ est unique et se note $f'(a)$. C'est le **nombre dérivé** de f en a.

Interprétations du nombre dérivé

Exemple 1 :
Une voiture effectue un trajet de Montpellier à Perpignan. La distance entre ces deux villes est de 160 km.

1. Sachant que l'automobiliste a mis 1h40 pour effectuer le trajet, quelle était sa vitesse moyenne en km/h ?

2. Pour autant, la vitesse de la voiture a varié au cours du trajet : accélération, décélération, arrêt aux péages... Comment comprenez-vous le terme "**vitesse moyenne**" ?

3. Quel est l'indicateur de la "**vitesse instantanée**" ?

4. Généralisons ce qui précède. On appelle d la fonction définie sur $[0; +\infty[$ et qui à chaque instant t associe la distance parcourue $d(t)$ entre l'instant 0 et l'instant t. Donnez à l'aide de d l'expression de la vitesse moyenne entre deux instants t_1 et t_2, puis celle de la vitesse instantanée à l'instant t_0.

Exemple 2 :
On verse du mercurochrome le long d'un fil absorbant, pas nécessairement homogène. Le mercurochrome se disperse ainsi dans le fil en étant plus ou moins concentré à certains endroits. Une fois l'équilibre atteint, on note $q(x)$ la quantité de mercurochrome présente sur le fil au point (en fait sur une très petite longueur autour du point) d'abscisse x.
La densité linéique c de mercurochrome mesure la quantité de mercurochrome (en moles) par unité de longueur (en m).

1. Quel sens donnez-vous à la densité linéique c ?

2. Si l'on note a une position sur le fil assimilé à une droite, trouvez une relation reliant q à c en a.

Le nombre dérivé exprime ainsi une variation instantanée d'une quantité.
Graphiquement, il s'interprète comme **la pente de la tangente** en un point donné.

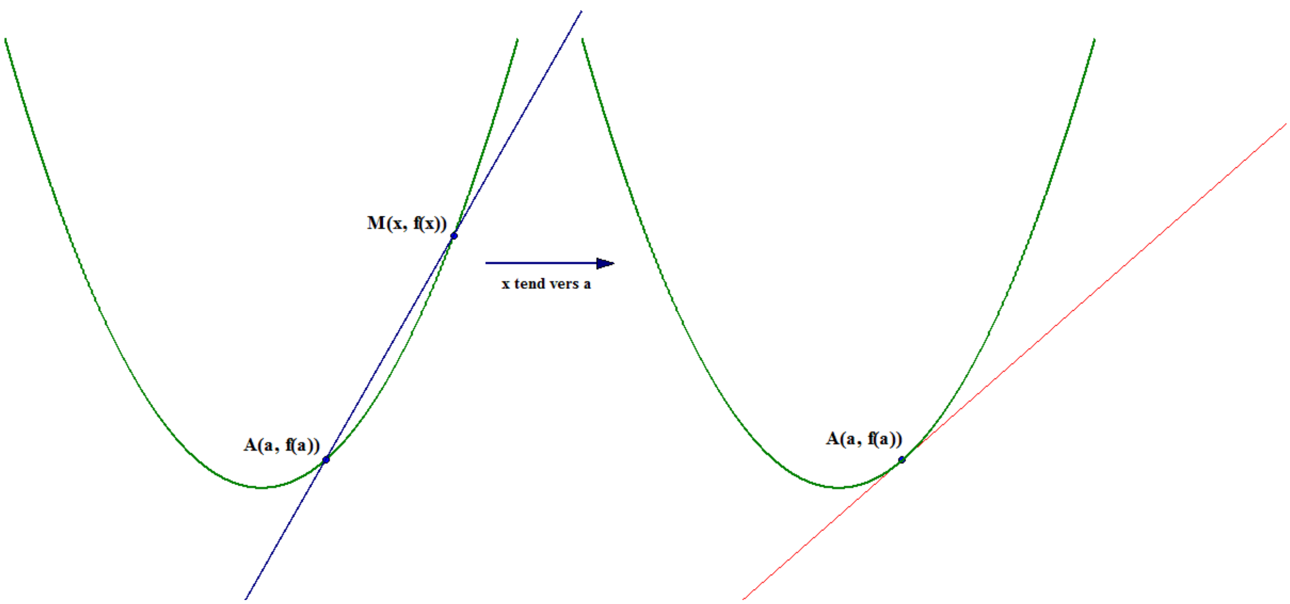


FIGURE 1 – De la corde à la tangente

Si f désigne la quantité variant en fonction de la variable x, la variation instantanée en a se note $f'(a)$ ou encore $\dfrac{df}{dx}(a)$ ou en cinématique $\dot{f}(a)$.

1.2 Du nombre dérivé à la fonction dérivée

Définition : Si en chaque réel $x \in I$, $f'(x)$ existe, on définit une fonction de I dans $\mathbb{R}$, notée f' et appelée **fonction dérivée** de f.

Nous pouvons comprendre la notion de fonction dérivée comme celle d'une **fonction lisse** : elle possède en chacun de ses points une tangente (non verticale).

Contre exemple classiques :

1. la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 (mais admet une demi-tangente à droite et une demi-tangente à gauche).
2. La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 car $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$.

1.3 La fonction exponentielle et les EDO du premier ordre

Théorème 1-3-1 : Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
2. Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous réels x et y : $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f(0) > 0$.

f est strictement croissante et définit une *bijection* de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. L'unique réel x tel que $f(x) = 1$ est noté e (nombre d'Euler) et f s'appelle la fonction exponentielle de base e ; $f(x) = \exp(x)$.
On prouve que pour tout rationnel r : $\exp(r) = e^r$. Utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (hors programme au lycée), on peut justifier la notation $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x.

Théorème 1-3-2 : Soit f une fonction continue sur un **intervalle** I (donc f est *primitivable*) et F une primitive de f sur I.

1. Les solutions de l'équation différentielle $(E)\ :\ y' = f$ sont les fonctions définies sur I par $y(x) = F(x) + C$, où C est une constante. Cette constante est déterminée de manière unique si on dispose d'une condition initiale $y(x_0) = y_0$ (exercice).
2. Les solutions de (E_0) : $y' = ay$ ($a \in \mathbb{R}$) sont les fonctions de la forme $y(x) = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle. En particulier, si $y(0) = y_0$, alors <u>LA</u> solution de (E_0) est définie par $y(x) = y_0 e^{ax}$.
3. Soit $(E)\ :\ y' = ay + f$ ($a \in \mathbb{R}$). Les solutions de (E) s'écrivent comme somme d'une solution de (E_0) et d'une solution particulière f_P de I : $y(x) = Ce^{ax} + f_P(x)$.
   <u>*Cas particulier*</u> : la fonction f est constante de valeur b. Alors les solutions de (E) sont les fonctions définies sur I par $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
   La constante C est déterminée de manière unique si on dispose d'une condition initiale $y(x_0) = y_0$.

Théorème 1-3-3 (Hors-programme) : Soit f et a deux fonctions continues sur un **intervalle** I et A une primitive de a sur I.
$(E_0)\ :\ y' = a(x)y$ et $(E)\ :\ y' = a(x)y + f$.
Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur I par $f(x) = Ce^{A(x)}$, où C est une constante réelle.
Les solutions de (E) s'écrivent comme somme d'une solution de (E_0) et d'une solution particulière f_P de (E) : $y(x) = Ce^{A(x)} + f_P(x)$.

Méthode de "variation de la constante" : Pour déterminer une solution particulière de (E), on cherche f_P sous la forme $f_P(x) = C(x)e^{A(x)}$.
Mais alors $f_P'(x) = C'(x)e^{A(x)} + C(x)a(x)e^{A(x)} = a(x)f_P(x) + f(x)$.
D'où $C'(x) = f(x)e^{-A(x)}$. On détermine alors une primitive $C(x)$ de $x \mapsto f(x)e^{-A(x)}$ et $f_P(x)$ s'en déduit, puis partant $y(x)$ aussi : $y(x) = e^{A(x)} \left(\int_{x_0}^{x} f(t)e^{-A(t)} + \text{constante} \right)$.

2 Premier exemple : la décroissance radioactive

2.1 Mise en place du modèle

En 1896, Henri Becquerel découvre que certaines substances émettent spontanément des rayonnements capables de traverser la matière. Pierre et Marie Curie étudieront notamment un de ces éléments qui prendra le nom de radium.

La radioactivité est d'origine naturelle. L'intégralité des éléments présents sur Terre, y compris les noyaux radioactifs, ont été formés :

- dans la phase de nucléosynthèse aux premiers instants de l'univers, pour les éléments légers (hydrogène et hélium),
- dans les étoiles, pour les éléments jusqu'au fer,
- lors de l'explosion des étoiles, marquant la fin de vie de celles-ci, pour les éléments au-delà du fer.

Un échantillon radioactif peut émettre trois types de particules associées à un rayonnement électromagnétique :

1. Particules α : noyaux d'hélium 4 émis avec une vitesse de 20 000 Km/s, facilement arrêtés avec une feuille de papier.
2. Particules β : se déclinent en deux sous particules, à savoir :
   Les particules β^-, des électrons émis a une vitesse de 280 000 km/s, arrêtés par une feuille d'aluminium.
   Les particules β^+, des positrons émis a une vitesse de 280 000 km/s, facilement arrêtés (dès qu'ils rencontrent de la matière : il y a annihilation !)
3. Rayonnement γ : une onde électromagnétique de $\lambda = 10^{-4}$nm. Pour les arrêter il faut quelques mètres de béton.

Les noyaux stables gardent "indéfiniment" la même composition. En revanche, les noyaux instables, entre autre radioactifs, se désintègrent (transforment) en émettant spontanément des particules α ou β souvent accompagnées d'un rayonnement γ.
Sur 350 noyaux naturels, environ 60 sont instables, ainsi que presque tous les noyaux artificiels.

Voici la situation qui va particulièrement nous intéresser mathématiquement. Il s'agit, étant donné un élément radioactif ${}_Z^AX$ d'étudier l'évolution du nombre d'atomes radioactifs restants (ne s'étant pas désintégrés) en fonction du temps t d'observation.
Nous noterons N_0 le nombre initial d'atomes radioactifs de l'élément ${}_Z^AX$.

$N(t)$ désigne le nombre d'atomes radioactifs du même élément à l'instant t.
Notre temps d'observation entre $t = 0$ et T est subdivisé en sous-intervalles de temps réguliers $\Delta t = \dfrac{T}{n}$, autrement dit, on observera le nombre d'atomes radioactifs restants de ${}_Z^AX$ aux instants : $0,\ \Delta t,\ 2\Delta t, \dots n\Delta t = T$.
Pendant la durée Δt, la variation $\Delta N(t)$ du nombre d'atomes radioactifs est égale à :

$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$$

Remarquons que pour tout instant t, $\Delta N(t) < 0$.

L'activité moyenne $A(t)$ exprimée en Becquerels (Bq) est le nombre moyen de désintégrations par seconde : $A(t) = -\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$. (d'où vient le signe "moins" ?)
Elle est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant t : $A(t) = \lambda N(t)$, avec λ constante radioactive qui dépend uniquement du nucléide radioactif considéré (Il s'agit

de la loi de Rutherford et Soddy (1902)) et s'exprime en s^{-1}.
Ainsi, on a :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \quad (*)$$

Remarques :

1. La loi de Rutherford-Soddy traduit que la probabilité pour un atome radioactif de se désintégrer pendant un intervalle de temps Δt est égale à $\lambda \Delta t$.
2. On parle d'activité "**sans mémoire**".

Faisant tendre Δt vers 0 dans (*), on obtient l'équation :

$$\boxed{N'(t) = -\lambda N(t)}$$

Cette équation faisant intervenir une fonction N et sa dérivée N' est une équation où **l'inconnue est une fonction ! On parle d'équation différentielle**.

Quelques valeurs de λ exprimées en s^{-1} ou jour^{-1} ou an^{-1} :
- pour l'uranium : $\lambda = 1,5 \times 10^{-10}$ an^{-1}
- pour le carbone 14 : $\lambda = 1,2 \times 10^{-4}$ an^{-1}
- pour l'iode 131 : $\lambda = 8,5 \times 10^{-2}$ jour^{-1}

Récapitulons : Pour λ donné, on cherche une fonction N définie ici sur $[0; +\infty[$ telle que :

$$\boxed{\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad t \in [0; +\infty[}$$

On rencontre très fréquemment la notation $\dfrac{dN(t)}{dt}$ à la place de $N'(t)$ et nous emploierons indifféremment l'une comme l'autre.

2.2 Le point de vue probabiliste

La probabilité qu'un atome d'iode 131 se désintègre par jour est égale 0,0085.
L'unité de temps étant le jour, voici un script écrit en Python, qui sur 100 jours détermine jour par jour, la quantité d'iode 131 restante.

```python
# desintegration radioactive
import matplotlib.pyplot as plt
from random import *
N = 2500        #2500 atomes d'iode 131 au debut
listex, listey = [0], [2500]

# fonction modelisant le processus de desintegration
def desintegration(N):
    Nb = N
    n = 0
    liste = [random() for i in range(N)] #liste d'atomes non desintegres
    for j in range(len(liste)) : #plusieurs atomes peuvent se desintegrer
        if liste[j] <= 0.0085 :  #pendant la meme unite de temps
            n += 1
    Nb = N - n
    return Nb
```

```python
# programme principal
i = 0
while i <= 100 and N >= 0 :
    N = desintegration(N)
    i += 1
    listex.append(i)
    listey.append(N)
plt.plot(listex,listey)
plt.title("Nombre d'atomes d'iode 131 restants en fonction du temps")
plt.xlabel('nombre de jours')
plt.ylabel("nombre d'atomes d'iode 131 restants")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

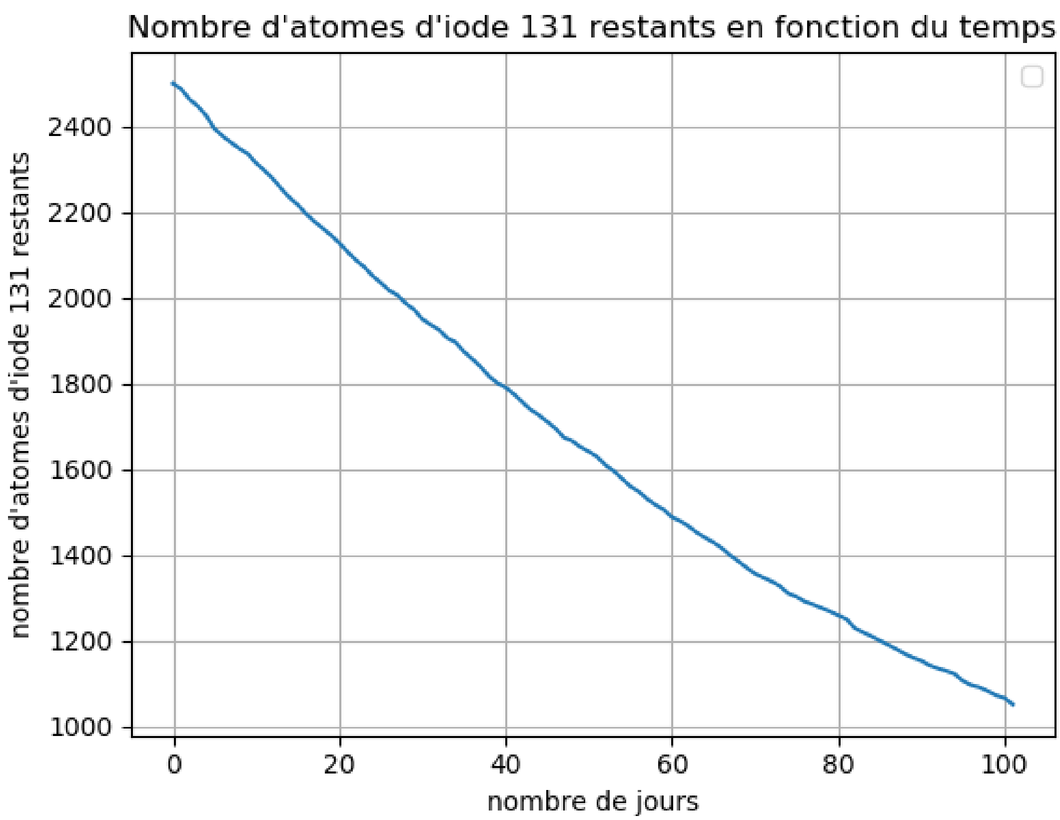


Figure 2 – Désintégration de l'iode 131

3 Second exemple : Dynamique des populations et cuves

Cette partie est largement inspirée par l'excellent livre de Lionel Roques : Modèles de réaction-diffusion pour l'écologie spatiale (éditions Quae).

Préliminaire : aussi élémentaire soit-elle, nous aurons très souvent à considérer la notion de **densité**. Que ce soit en biologie, en chimie ou en physique, nous comprenons la densité comme un nombre d'individus, de moles ou de particules par unité de longueur (resp. de surface, de volume). On parle alors de densité linéïque (resp. surfacique, volumique). On peut également considérer les variations du nombre d'individus $N(t)$ d'une population au cours du temps. La variation instantanée $N'(t)$ de ce nombre d'individus a donc pour dimension : nombre d'individus par unité de temps.

On note $N(t)$ la population à l'instant t. On suppose que les nombres de naissances et de morts par unité de temps sont constants sur un petit intervalle de temps δt.
On notera $L.t^{-1}$ (resp. $D.t^{-1}$) le nombre de naissances (resp. de morts) par unité de temps.
Ainsi, $N(t+\delta t) - N(t) = (L.t^{-1} - D.t^{-1})\delta t$.
Divisant par δt que l'on fait tendre vers 0, on obtient :

$$(1) \quad N'(t) = (L.t^{-1} - D.t^{-1})$$

3.1 Mise en place des modèles

A) Un premier modèle : le modèle de Malthus (1826) Irréaliste !

Dans *An essay on the principle of population* en 1826, Thomas Malthus émet l'hypothèse qu'une population croît proportionnellement au nombre de personnes composant cette population.
Ainsi, si l'on note N_0 l'effectif de la population à l'instant initial ($t = 0$) d'observation : il existe une certaine constante $r > 0$ tel que pour tout réel $t \geq 0$, $N'(t) = rN(t)$.

Détaillons un peu ...
On suppose ici que les nombres de naissances et de morts par unité de temps sont proportionnels à la taille de la population à chaque instant t : $L.t^{-1} = aN(t)$ et $D.t^{-1} = bN(t)$.
Mais alors, l'équation (1) se réécrit :

$$(2) \quad N'(t) = (a - b)N(t)$$

Définition 3-1-1 : On pose $r := a - b$.

1. $a > 0$ (resp. $b > 0$) s'appelle le *taux de natalité* (resp. *taux de mortalité*) *intrinsèque.*
2. $r \in \mathbb{R}$ s'appelle le *taux de croissance intrinsèque.*

Proposition 3-1-2 : Si N_0 est la population initiale, alors on a $N(t) = N_0 e^{rt}$ $(\forall t \geq 0)$.

On a ainsi une croissance ou décroissance exponentielle selon le signe de r. Ce modèle est irréaliste en dynamique des populations, car il ne prend pas en compte la compétition entre les individus pour la ressource. Plus leur nombre augmente, plus la ressource diminue et de ce fait, on devrait avoir une diminution de la croissance. Nous sommes donc amenés à considérer un modèle plus pertinent sur le long terme.

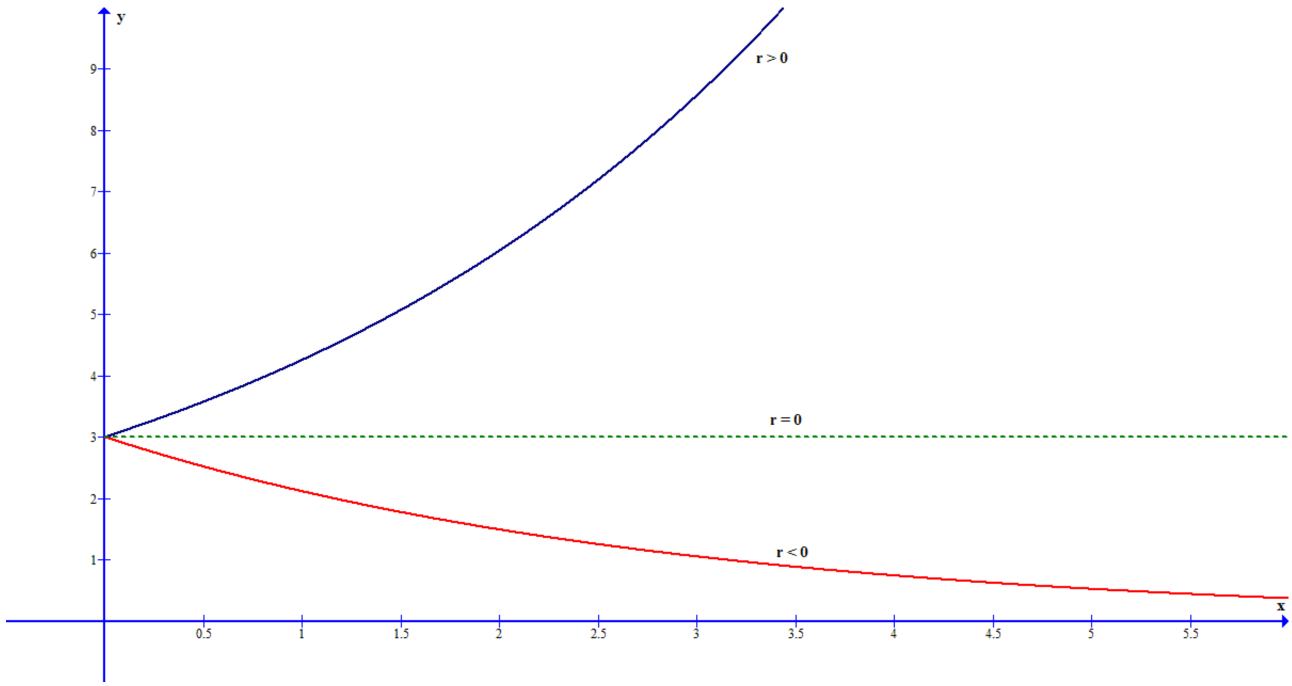


FIGURE 3 – Modèle de croissance Malthusien selon le signe de r

B) Un second modèle : le modèle de Verhülst (1845) Déjà mieux !
Repartons de (1).
Cette fois-ci, prenons en compte des phénomènes de compétition pour la ressource :

— Le taux de natalité a est toujours supposé constant.
— Le taux de mortalité est supposé augmenter avec la taille de la population de manière affine. b devient $b(N) = b_0 + b_1 N$.

(1) se réécrit :

$$N'(t) = aN(t) - (b_0 + b_1 N(t))N(t)$$

soit

$$N'(t) = (a - b_0)N(t)\left[1 - \frac{b_1}{a - b_0}N(t)\right]$$

Posons $r := a - b_0$ et $K = \dfrac{a - b_0}{b_1}$. On a alors :

$$(3) \quad \boxed{N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)}$$

Définition 3-1-3 : Le coefficient $r = a - b_0$ s'appelle le *taux intrinsèque de croissance* de la population. Il s'exprime en l'inverse d'une unité de temps : ut^{-1}.

Remarques 3-1-4 :

— Ce taux est intrinsèque dans le sens où il correspond au taux de croissance de la population en l'absence de compétition (cf modèle de Malthus).
— Le coefficient K s'interprète comme la capacité d'accueil du milieu (exprimée en nombre d'individus). On peut le comprendre car

$$K = \frac{r}{b_1} = \frac{\text{taux intrinsèque de croissance (en } ut^{-1})}{\text{coefficient de mortalité (en } ut^{-1} \times \text{effectif}^{-1})}$$

Proposition 3-1-5 : La solution de $\begin{cases} N'(t) = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$ est :

$$(\bigstar) \quad N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}, \quad \text{pour } t \geq 0$$

Remarques 3-1-6 :

— Il était encore possible de calculer une solution explicite. Ce sera très rarement le cas pour des équations différentielles non linéaires, où d'autres méthodes prendront le relai : leur étude qualitative.

— On a fait comme hypothèse que le nombre de naissances restait constant alors que le nombre de morts suivait une évolution affine. Ceci n'est en rien restrictif. En effet, si l'on avait également supposé le nombre de naissances avec une croissance affine : $a = a(N) = a_0 + a_1 N$, alors il est aisé de prouver que l'équation (1) se réécrit :

$$N'(t) = (a_0 - b_0)N(t)\left(1 + \frac{a_1 - b_1}{a_0 - b_0}N(t)\right)$$

et l'on est ramené au cas précédent !

Nous allons donner un bref aperçu des **propriétés qualitatives** d'équations différentielles autonomes du type $y'(t) = f(y(t))$. En un sens, y' ne dépend que de y. Nous écrirons $y' = f(y)$. Le but est de connaître le **comportement à long terme** de ce type d'équations différentielle, celui à court terme étant connu à l'aide du signe de la condition initiale.

Définition 3-1-7 : Une **solution stationnaire** du modèle générique $N'(t) = f(N(t))$ est une solution constante N^* ne dépendant pas de t. Nous parlons aussi d'**état stationnaire** ou d'**équilibre**.

Remarquons alors que si la condition initiale N_0 est un équilibre, alors $N(t) \equiv N_0$ est une solution constante de l'équation différentielle. Comme la dérivée d'une fonction constante est nulle, nous pouvons déterminer aisément les équilibres :

Proposition 3-1-8 : Une solution $N^\star$ est un équilibre si et seulement si $f(N^\star) = 0$.

Dans le cas du modèle de la proposition, dit *logistique* ou *de Verhülst*, les solutions stationnaires sont clairement 0 et K : $f(N) = 0 \iff rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) = 0 \iff N = 0$ ou $N = K$.

Définition 3-1-9 : S'il existe un voisinage[1] $\mathcal{V}$ de $N^\star$ tel que pour tout N_0 dans $\mathcal{V} \cap \mathbb{R}^+$, la solution de $\begin{cases} N'(t) = f(N(t)), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases}$ converge vers $N^\star$ quand $t \to +\infty$, l'état stationnaire $N^\star$ est dit **(localement) stable**. Dans le cas contraire, $N^\star$ est dit **instable**.

Cette terminologie est justifiée par le fait que si N_0 est une condition initiale "proche" d'un équilibre stable N^*, alors alors la solution $N(t)$ va se rapprocher de N^* : $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = N^*$.

1. un voisinage $\mathcal{V}$ d'un réel a est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle I contenant lui-même a : ce qui équivaut à dire que $\exists \epsilon > 0,\ ]a - \epsilon; a + \epsilon[\subset \mathcal{V}$.

Inversement, si N_0 est une condition initiale "proche" d'un équilibre instable N^*, alors la solution $N(t)$ va s'éloigner de N^*.

Dans le cas présent, la stabilité des états 0 et K peut être étudiée directement en utilisant la formule ($\bigstar$), mais de manière plus générique, en étudiant le signe de f :

Proposition 3-1-10 :

1. L'état stationnaire N^* de $N' = f(N)$ est stable si et seulement si $f'(N^*) < 0$.
2. L'état stationnaire N^* de $N' = f(N)$ est instable si et seulement si $f'(N^*) > 0$.

Dans le cas présent, $f(N) = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$, donc $f'(K) = -r < 0$ et $f'(0) = r > 0$.
On conclut ici à l'instabilité de 0 et à la stabilité de K. Donc quelle que soit la donnée initiale N_0, $N(t) \to K$ quand $t \to +\infty$.

Proposition 3-1-11 : L'ordonnée des points d'inflexion éventuels de N sont solutions de l'équation (E_I) : $\dfrac{df}{dN}(N) = 0$ (exercice).

Dans le cas présent : $f(N) = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) = rN - \dfrac{rN^2}{K}$. D'où $\dfrac{df}{dN}(N) = r - \dfrac{2rN}{K}$.

On en déduit que $\dfrac{df}{dN}(N) = 0 \iff \boxed{N = \dfrac{K}{2}}$.

En particulier, si l'on a $N_0 = \dfrac{K}{2}$, la population augmente certes, mais la croissance de la population diminue dès le départ.

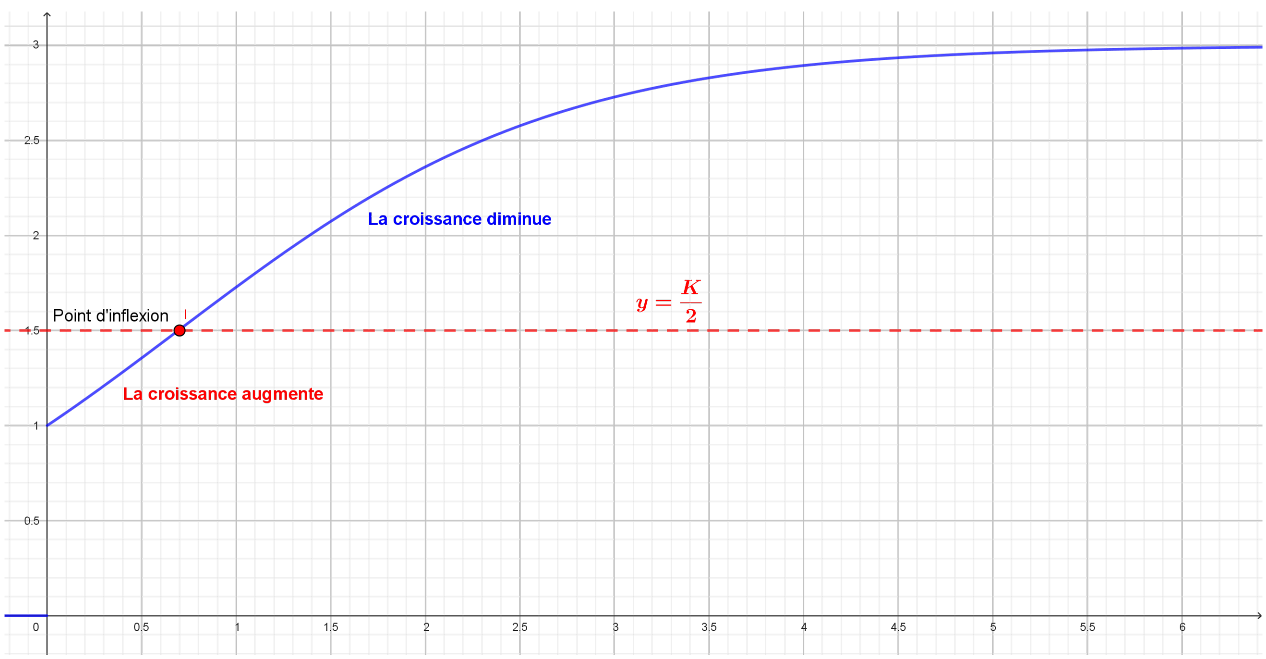


FIGURE 4 – Modèle de croissance de Verhülst (logistique) avec $K = 3$, $N_0 = 1$ et $r > 0$

Remarque 3-1-12 : le terme $1 - \dfrac{N(t)}{K}$ dans l'équation $N'(t) = rN(t)\left(1 - \dfrac{N(t)}{K}\right)$ traduit un **frein à la croissance** (lié à la capacité biotique K) inexistant dans le modèle Malthusien.

C) Un troisième modèle : le modèle de Gompertz-Makeham (1825) L'équation de base est toujours (1).
Au contraire du modèle de Verhülst, William Gompertz considère que la *force de mortalité*[2] évolue de manière exponentielle avec l'âge. Le **terme de frein** à l'expansion est $\ln\left(\dfrac{K}{N(t)}\right)$

(1) se réécrit : $\boxed{N'(t) = rN(t)\ln\left(\dfrac{K}{N(t)}\right)}$.

Remarque 3-1-13 : Là encore, on peut calculer une solution explicite de (1) en posant $u(t) = \ln(N(t))$. Mais alors $u'(t) = \dfrac{N'(t)}{N(t)} = r(\ln K - u(t))$ i.e $u'(t) = -ru(t) + r\ln K$ (EDO linéaire d'ordre 1 à coefficients constants). On a immédiatement $u(t) = Ce^{-rt} + \ln K$, d'où $N(t) = Ke^{Ce^{-rt}}$. Or $N(0) = N_0$, donc $C = \ln\left(\dfrac{N_0}{K}\right)$.

On en déduit que pour tout $t \geq 0$, $\underline{N(t) = Ke^{\ln\left(\frac{N_0}{K}\right)e^{-rt}}}$.

Comme pour le modèle logistique, on peut calculer l'ordonnée des points d'inflexion éventuels de N en résolvant l'équation $\dfrac{df}{dN}(N) = 0$, où $f(N) = rN\ln\left(\dfrac{K}{N}\right) = rN(\ln K - \ln N)$.
D'où $\dfrac{df}{dN}(N) = r\ln\left(\dfrac{K}{N}\right) - r$. Ainsi, $\dfrac{df}{dN}(N) = 0 \iff \ln\left(\dfrac{K}{N}\right) = 1 \iff \boxed{N = \dfrac{K}{e}}$.

Remarque 3-1-14 : Le modèle de Gompertz-Makeham est globalement équivalent au modèle logistique :

1. 0 et K sont les deux seuls états stationnaires.
2. 0 est instable et K est stable.
3. Par contre, l'ordonnée du point d'inflexion pour le modèle de Gompertz : $\dfrac{K}{e}$ est inférieur à celui du modèle logistique : $\dfrac{K}{2}$; la période où la croissance de la population augmente est plus courte.

2. D'après *Wikipedia* : la force de mortalité désigne, en démographie, biologie et science actuarielle, la fonction décrivant l'évolution du risque de décès par âge au sein d'une population. Formellement, elle est définie comme la probabilité instantanée de décès par âge conditionnelle à la survie, ce qui la rend donc équivalente au taux de défaillance en ingénierie de fiabilité et en analyse de survie. Elle sert de base de calcul à de nombreux indicateurs synthétiques de mortalité issus des tables de mortalité, dont notamment l'espérance de vie.

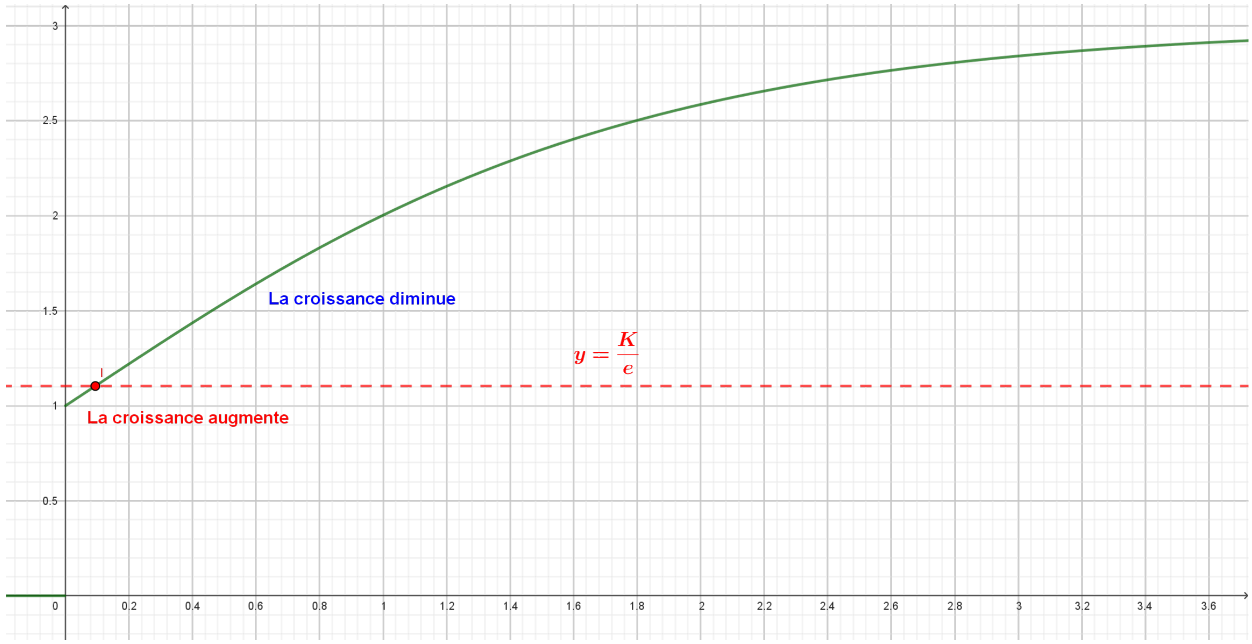


FIGURE 5 – Modèle de croissance de Gompertz-Makeham avec $K = 3$, $N_0 = 1$ et $r > 0$

Aussi, le choix de l'un ou l'autre des modèles dépend des conditions expérimentales. Ils sont utilisés notamment pour modéliser la croissance d'une espèce bactérienne donnée, par exemple E. Coli.

3.2 Vers un modèle de réflexion

Considérons une cuve pleine de 450 litres contenant initialement 30 kg de sel. On y fait couler de l'eau contenant $1/9$ kg de sel par litre, à raison de 9 L/min. Le mélange, maintenu homogène par brassage, s'écoule à raison de 13,5 L/min. Quelle quantité de sel reste-t-il au bout d'une heure ?

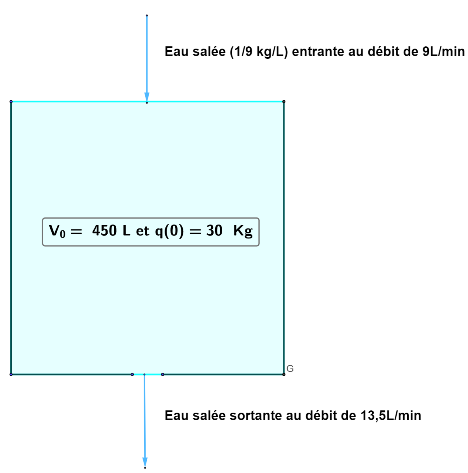


FIGURE 6 – Flux de matière dans une cuve

Appelons $V(t)$ (resp. $q(t)$) le volume d'eau (resp. la quantité de sel) dans la cuve t minutes

après l'instant initial.
Le volume de la cuve diminue de 4,5 L d'eau salée par minute, ainsi comme la cuve a un volume initial de 450 L, $V(t) = 450 - 4,5t$.

Considérons deux instants infiniment proches t et $t + \Delta t$. Entre t et $t + \Delta t$:

1. La cuve reçoit une quantité de $9 \times 1/9 \times \Delta t = \Delta t$ g de sel,
2. En supposant la concentration de sel qui s'échappe de la cuve, constante sur $[t; t + \Delta t]$, la cuve perd $13,5 \times \dfrac{q(t)}{V(t)} \Delta t$ g de sel.

Ainsi, $\Delta q(t) = q(t + \Delta t) - q(t) = \left(1 - \dfrac{13,5q(t)}{450 - 4,5t}\right) \Delta t$.
Divisant par Δt que l'on fait tendre vers 0, il vient :

$$\boxed{q'(t) = 1 - \frac{3q(t)}{100 - t}}$$

C'est une équation de la forme $y' = a(t)y + b$ dont la résolution n'est pas au programme de Terminale. C'eût été le cas si le coefficient $a(t)$ avait été constant. Mais pas de panique : la méthode d'Euler[3] vient à la rescousse !

La fonction q est définie sur $[0; 100]$ (la cuve est vide au bout de 100 min), mais comme nous souhaitons calculer $q(60)$, nous allons partager l'intervalle de temps $I = [0; 60]$ en 1000 sous-intervalles. Posons alors $h = \dfrac{60}{1000} = 0,06$ (le pas de la méthode).

On définit la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ par : $\begin{cases} q_0 = 30 \\ q_{n+1} = q_n + 0,06\left(1 - \dfrac{3q_n}{100 - 0,06n}\right) & \text{pour tout } n \geq 0 \end{cases}$

On trouve $q_{60} \approx 18,7$ g.

La valeur exacte est 18,72 g. Pas mal... Essayez avec un pas plus petit.

Pour résumer la méthode employée, en occultant le manque de rigueur de l'étape 2, nous pouvons dire que :

$$\boxed{\textbf{Variation instantanée de la quantité} = \textbf{flux entrant - flux sortant}}$$

Aussi simple que soit cette équation, elle est d'une efficacité redoutable ! Nous avons ainsi la généralisation suivante :

Considérons un réservoir qui contient initialement V_0 litres d'une solution contenant a g d'une certaine substance.
Une autre solution contenant cette fois b g de substance par litre est versée dans ce réservoir avec un débit de e ℓ/s, tandis que le mélange homogénéisé à chaque instant, s'écoule du réservoir avec un débit de f ℓ/s. Le problème est de calculer la quantité $q(t)$ de sel présente dans la cuve à chaque instant t.

3. La méthode d'Euler, abordée en première, consiste à subdiviser un segment $I = [a; b]$ en n sous-intervalles. On pose alors $h = \frac{b-a}{n}$ (pas de la méthode) et $x_n = a + nh$. Connaissant $y(a) = \alpha$, $y'(a)$ et la relation $y'(t) = f(t, y(t))$, on définit le schéma numérique par récurrence par : $y_0 = \alpha$ et $(\forall k \in [\![0; n-1]\!])$ $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$.

Appelons $V(t)$ (resp. $q(t)$) le volume d'eau (resp. la quantité de sel) dans la cuve t secondes après l'instant initial.
Variation instantanée du volume : $V'(t) = e - f$, ainsi : $V(t) = V_0 + (e - f)t$.
La concentration $c(t)$ de substance à tout instant t est égale à : $\dfrac{q(t)}{V(t)} = \dfrac{q(t)}{V_0 + (e-f)t}$. Ainsi :

1. flux entrant de substance : $be\ g/s$
2. flux sortant de substance : $f\dfrac{q(t)}{V_0 + (e-f)t}$.

On en déduit que :
Variation instantanée de la quantité de substance : $q'(t) = be - f\dfrac{q(t)}{V_0 + (e-f)t}$,
équation différentielle du premier ordre qui se réécrit :

$$\boxed{q'(t) + f\frac{q(t)}{V_0 + (e-f)t} = be}$$

Exemples résolus

1. Un réservoir cubique de 2 m de côté est rempli d'eau à hauteur de 90 cm. Il se vide par l'intermédiaire d'un trou circulaire de 22 mm de diamètre situé sur sa partie inférieure. La vitesse d'écoulement de l'eau est de $2,5\sqrt{h(t)}$ cm/s où $h(t)$ est la hauteur d'eau restant dans le réservoir au bout de t secondes.
   Combien de temps mettra-t-il à se vider ?
2. Un premier réservoir contient $0,5m^3$ d'eau pure dans laquelle sont dissous 40 kg de sel. De l'eau pure coule dans ce réservoir à raison de $3 \times 10^{-4} m^3/s$ et le mélange, maintenu uniforme par brassage, s'écoule en même quantité. Le liquide tombe dans un second réservoir contenant initialement $0,5m^3$ d'eau pure et s'écoule de ce dernier en même quantité. Quelle quantité de sel contiendra ce second réservoir au bout d'une heure ?

Solutions

1. Appelons $h(t)$ (resp. $V(t)$) la hauteur d'eau en cm (resp. le volume d'eau) dans le réservoir après t secondes.
   Appliquant le principe précédent, nous avons (pas de flux entrant) que :
   $$V'(t) = -2,5\pi \times 1,1^2 \times \sqrt{h(t)} \ \ (\text{en cm}^3/s)$$
   Or $V(t) = 200^2 h(t)$, d'où $h(t) = \dfrac{V(t)}{200^2}$ et donc :
   $$V'(t) = -0,02375\sqrt{V(t)}$$
   et comme $\dfrac{V'}{\sqrt{V}}$ s'intègre en $2\sqrt{V}$:
   $$\sqrt{V(t)} = -0,0475t + C$$
   Or $V_0 = 3,6 \times 10^6\ cm^3$, d'où $C \approx 1897$. Ainsi : $V(t) = (1897 - 0,0475t)^2$.
   Le réservoir est vide quand $V(t) = 0$ i.e si $t = 75880s$, soit environ 21h.

2. Rappelons que le flux (ici en Kg de sel/s) est égal au débit d'eau (en m^3/s) multiplié par la concentration [c] de sel (en kg/m^3 d'eau) : Flux = [c]×débit.

   Commençons par remarquer que le volume des réservoirs 1 et 2 reste constant et égale à $0,5m^3$ à tout instant. Posons alors $q_i(t)$ (resp.$c_i(t)$) la quantité de sel en kg (resp. la concentration de sel en kg/m^3) présente t secondes après l'instant initial dans le réservoir i $(i = 1, 2)$.
   $c_1(t) = \dfrac{q_1(t)}{V_1(t)} = \dfrac{q_1(t)}{0,5} = 2q_1(t)$ avec $c_1(0) = 80\ kg/m^3$.

   Flux de sel entrant dans le réservoir 1 : 0 kg/s.
   Flux de sel sortant du réservoir 1 : $2q_1(t) \times 3.10^{-4} = 6.10^{-4}q_1(t)\ kg/s$.
   Donc $q_1'(t) = -6.10^{-4}q_1(t)$.
   Ainsi, $q_1(t) = q_1(0)e^{-6.10^{-4}t} = 40e^{-6.10^{-4}t}$.

   Comme précédemment, $c_2(t) = 2q_2(t)$, avec $c_2(0) = 0\ kg/m^3$ (et donc $q_2(0) = 0$).

   Flux de sel entrant dans le réservoir 2 : $6.10^{-4}q_1(t) = 6.10^{-4} \times 40e^{-6.10^{-4}t}\ kg/s$.
   Flux de sel sortant du réservoir 2 : $6.10^{-4}q_2(t)\ kg/s$.
   Donc $q_2'(t) = 6.10^{-4}(40e^{-6.10^{-4}t} - q_2(t))$ (E).

   Cette dernière équation est de la forme $y' = ay + b(t)$, avec $a = -6.10^{-4}$ et $b(t) = -40ae^{at}$. Ses solutions sont les fonctions de la forme $y(t) = Ce^{at} + f_P(t)$, où f_P est une solution particulière.
   En utilisant par exemple la méthode de *variation de la constante*, on trouve , puisque $q_2(0) = 0$ que $q_2(t) = -40ate^{at}$.
   Au bout d'une heure, le second réservoir contiendra donc une masse $m = 40 \times 6.10^{-4} \times 3600 \times e^{-6.10^{-4} \times 3600} \approx 9,96$ kg de sel.

4 Troisième exemple : le modèle SIR en épidémiologie

Le modèle SIR fait partie de ce qu'on appelle "*les modèles à compartiments*", qui partitionnent une population donnée en plusieurs sous-ensembles.

4.1 Mise en place du problème

Considérons une population d'effectif constant N durant notre observation. Une pathologie affecte des individus de cette population. On la partitionne alors en trois groupes disjoints :

1. Le groupe S des individus susceptibles d'être infectés (mais qui ne le sont pas),
2. Le groupe I des individus infectés.
3. Le groupe R des individus remis (guéris).

Nous travaillerons avec les proportions d'individus, si bien qu'à tout instant t :

$$S(t) + I(t) + R(t) = 1$$

donc :

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

Le modèle SIR fait l'hypothèse qu'entre deux instants t et $t + \Delta t$ infiniment proches :

1. Le nombre d'individus susceptibles diminue d'un facteur β proportionnel à Δt et à la *proportion d'individus sains* dans la population multipliée par le nombre d'individus infectés.
2. Les individus infectés guérissent avec un taux de guérison $\gamma > 0$ proportionnel à Δt et à la proportion d'individus infectés dans la population et donc sont définitivement remis.

Nous traduisons ceci par : $\begin{cases} S(t+\Delta t) - S(t) = -\beta S(t)I(t)\Delta t \\ I(t+\Delta t) - I(t) = \beta S(t)I(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t \\ R(t+\Delta t) - R(t) = \gamma I(t)\Delta t \end{cases}$

Divisant par Δt que l'on fait tendre vers 0, il vient (S) : $\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) \quad (3) \end{cases}$

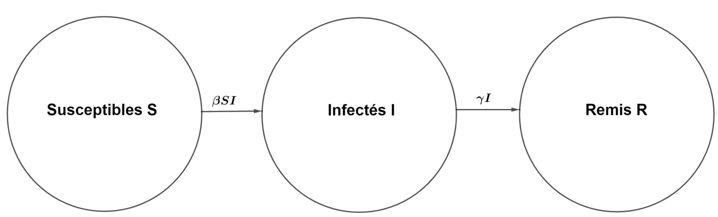


FIGURE 7 – Modèle SIR

Remarque 4-1-1 :

1. Ramenés au nombre d'individus, nous pouvons comprendre SI comme le nombre de contacts possibles entre les susceptibles et les infectés et β comme un coefficient produit du nombre moyen de contacts entre susceptibles et infectés par la probabilité de transmission de la maladie d'un individu infecté vers un individu sain.
2. γ peut s'interpréter comme l'inverse du temps de guérison d'un individu infecté.

4.2 Analyse qualitative du système d'EDOs obtenu

Le système d'EDO

$$(S)\ :\ \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) \quad (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) \quad (3) \end{cases}$$ n'a pas de solution explicite.

En revanche, du fait que $\beta, \gamma > 0, S(t), I(t) \geq 0$, nous obtenons directement que :
<u>S est décroissante</u> et <u>R est croissante</u>.

Le cas de la fonction I est plus complexe et régit la dynamique de l'épidémie : nous pouvons écrire que $I'(t) = \gamma I(t)\left(\frac{\beta}{\gamma}S(t) - 1\right) = \gamma I(t)(R_0 S(t) - 1)$, où $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ est par définition le *coefficient de reproduction*.

Effectuons comme pour les EDO autonomes vues dans le second exemple une étude qualitative pour décrire la courbe de I. Nous noterons S_0 pour $S(0)$.

Les équilibres du système sont les fonctions constantes S^*, I^* et R^* solutions de

$$(S_{eq})\ :\ \begin{cases} -\beta S^* I^* = 0 \quad (1) \\ \gamma I^*(R_0 S^* - 1) = 0 \quad (2) \\ \gamma I^* = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Nous en déduisons immédiatement que $I^* = 0$: la seule solution stationnaire pour I est la fonction nulle.

1. Si $R_0 S_0 < 1$, alors $I'(0) < 0$. Donc (par continuité de I') I décroit au voisinage de 0.
   Précisons : comme S est décroissante et $R_0 > 0$, on a pour tout $t \geq 0\ :\ R_0 S(t) \leq R_0 S_0$ et donc $I'(t) \leq \gamma(R_0 S_0 - 1)I(t) \leq 0$, d'où I décroissante.
   La fonction I est décroissante et minorée sur $\mathbb{R}^+$, donc admet une limite finie ℓ_I en $+\infty$. Par ce qui précède, $\ell_I = I^* = 0$. Nous en déduisons que $I(t)$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini. L'épidémie va s'éteindre.

2. Si $R_0 S_0 > 1$, alors $I'(0) > 0$ et I va croitre au voisinage de 0. Or S décroit, donc d'après le TVI, il existe un certain instant $T > 0$ pour lequel $R_0 S(T) = 1$.
   Mais alors $I'(T) = 0$ et I atteint un maximum I_{max} en $t = T$.
   Pour $t > T$, $I'(t) = \gamma(R_0 S(t) - 1)I(t) \leq 0$ et I décroit.
   L'épidémie a atteint son seuil critique à l'instant T et le nombre d'infectés va décroitre vers $I^* = 0$.

3. Si $R_0 S_0 = 1$, alors $I'(t) = 0$, donc I est constante. Nécessairement $I \equiv I^* = 0$.

5 Exercices et problèmes

5.1 Énoncés

Exercice 1 : loi de refroidissement de Newton.
Soit un corps porté à une température $T_{max} > T_0$, où T_0 désigne la température du corps à l'équilibre, considérée égale à celle de l'environnement.
La loi de refroidissement de Newton stipule que la variation instantanée de température du corps est proportionnelle à la différence de température du corps et le milieu environnant.
Déterminer une équation différentielle vérifiée par T, où $T(t)$ désigne la température du corps à l'instant t exprimé en minutes.

Exercice 2 : transformation d'un sucre en dextrose.
Cent grammes de sucre de canne sont transformés en dextrose selon un taux proportionnel à la quantité non transformée.
Déterminer une équation différentielle exprimant le taux instantané de transformation après t minutes. On notera

Exercice 3 : un modèle d'accroissement de population.
La population d'une ville constituée à l'instant initial $t = 0$ de N_0 individus s'accroit suivant un taux proportionnel à celle-ci et à la différence entre N_0 et celle-ci.
Déterminer une équation différentielle vérifiée par N, où $N(t)$ désigne la population de la ville à l'instant t exprimé en jours.

Exercice 4 : allez, ça coule de source ! Un réservoir de 100 litres est rempli d'eau, contenant 60 g de sel. De l'eau pure coule dans le réservoir à raison de 2 litres par minute, et la solution uniformisée par brassage, s'écoule en quantité égale. Combien reste-t-il de sel dans le réservoir au bout d'une heure ?

Exercice 5 : un peu de dissolution.
Une substance se dissout dans l'eau en quantités proportionnelles au produit a) de la quantité non encore dissoute et b) de la différence entre la concentration d'une solution saturée et de la concentration à l'instant considéré.
On sait que pour fabriquer 100 g de solution saturée, on doit dissoudre 50 g de substance.
Lorsque 30 g de la substance sont plongés dans 100 g d'eau, 10 g se dissolvent en 2 heures.

1. Déterminer une équation différentielle vérifiée par q, où $q(t)$ la quantité en grammes de substance transformée après t heures.
2. Combien de grammes de la substance seront dissous en 5 heures ?

Exercice 6 : une fuite.
Considérons un réservoir d'eau cylindrique de rayon 2,50 m et de hauteur 3,50 m. Un trou circulaire de 5 cm de diamètre est situé sur sa partie inférieure. L'eau contenue dans le réservoir s'écoule de ce trou à la vitesse $v = 26\sqrt{h}$ cm/s, h désignant la hauteur d'eau restant dans le réservoir.
Si le réservoir est plein, combien de temps mettra-t-il à se vider ?

Exercice 7 : un peu de physique.
Un parachutiste tombe à la vitesse de 55 m/s lorsque son parachute s'ouvre. La résistance de l'air est $Pv^2/25$, où P est le *poids* total de l'homme et du parachute.

Quelle est l'expression de la vitesse en fonction du temps après l'ouverture du parachute ? (rapppel : $P = mg$, où $g \approx 10$)

Exercice 8 : de la physique.
Un circuit électrique comporte en série une résistance R, un condensateur de capacité C et un générateur de f.e.m E.

1. Faire un schéma.
2. Rappeler l'équation différentielle reliant la charge q du condensateur aux autres variables.
3. Déterminer q sachant que $q = q_0$ quand $t = 0$.

Exercice 9 : retour aux maths.
Écrire les équations différentielles des familles de courbes définies par les conditions suivantes :

1. En chaque point (x, y), la pente de la tangente est égale au carré de l'abscisse du point.
2. La somme des coordonnées des points de rencontre de la tangente avec les deux axes est constante et égale à 2.
3. Le segment joignant le point $P(x, y)$ au point d'intersection de la normale en P et de l'axe des abscisses a son milieu sur l'axe des ordonnées.

Problème : modélisation d'une épidémie de variole.
En 1760, Daniel Bernoulli présente à l'académie des sciences de Paris un mémoire intitulé "*Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de la prévenir*". Il y adopte les hypothèses simplificatrices qui suivent :

— indépendamment de son âge, un individu a une probabilité $q\delta t$ d'être infecté par la variole pendant la durée δt ;
— indépendamment de son âge, un individu infecté pour la première fois meurt avec une probabilité p et survit avec une probabilité $1 - p$;
— Lorsqu'un individu survit, après avoir été infecté par la variole, il est immunisé définitivement.

Daniel Bernoulli estime que $p = q = \dfrac{1}{8}$.

Notations :

— On étudie l'évolution d'un groupe d'individus initialement constitué de P_0 individus nés la même année. On note t l'âge de ces individus, où t décrit $\mathbb{R}^+$.
— La mortalité naturelle à l'âge t (i.e de causes différentes de la variole), est notée $m(t)$: dit autrement, la probabilité de mourir entre l'âge t et l'âge $t + \delta t$ est égale à $m(t)\delta t$.
— Le nombre d'individus encore en vie à l'âge t sans jamais avoir été infectés est noté $S(t)$.
— Le nombre d'individus encore en vie à l'âge t et immunisés est noté $R(t)$.
— Le nombre total d'individus encore en vie à l'âge t est noté $P(t)$: $P(t) = S(t) + R(t)$. Ainsi, $P(0) = P_0$.

On supposera les fonctions R et S dérivables sur $\mathbb{R}^+$, à dérivée continue (on dit de classe $\mathcal{C}^1$).

1. a) On note ΔS la variation de $S(t)$ entre t et $t + \delta t$.
Justifier heuristiquement que S est solution de l'équation différentielle (E_S) : $S'(t) = -(m(t) + q)S(t)$.
b) De la même façon, justifier que R est solution de l'équation différentielle (E_R) : $R'(t) = q(1 - p)S(t) - m(t)R(t)$.

2. On pose $f = \dfrac{S}{P}$ que l'on suppose bien définie.

   a) Justifier que f est solution de $(E_f)\ :\ f'(t) = -qf(t) + pqf^2(t)$

   b) En posant $g = \dfrac{1}{f}$, prouver que $(\forall t \geq 0)\ f(t) = \dfrac{1}{p + (1-p)e^{qt}}$.

   c) Quelles hypothèses a-ton utilisé pour effectuer ces calculs ?

3. On suppose que l'application m est continue sur $\mathbb{R}^+$. Résoudre directement l'équation (E_S) puis l'équation (E_R) et retrouver l'expression trouvée en 2)b). Que deviennent les hypothèses de la question 2)c) ?

4. a) Daniel Bernoulli estime que le nombre de morts par la variole entre l'âge t et l'âge $t+1$ est égal à $\dfrac{1}{2}pq(S(t) + S(t+1))$. Justifier cette formule.

   b) On souhaite étudier l'effet d'une campagne de vaccination. Dans ce but, on note $P^*(t)$ le nombre d'individus qui seraient encore vivants à l'instant t si l'on suppose que les P_0 individus initiaux sont vaccinés à la naissance et que le vaccin les immunise totalement de la variole.

   En utilisant un tableur, avec $P_0 = 10000$, et pour n variant de 0 à 30, compléter les colonnes donnant $P(n)$, $S(n)$, $R(n)$, le nombre de morts par la variole pendant l'année n et $P^*(n)$.

5. Daniel Bernoulli obtient que l'espérance de vie des P_0 initiaux est de $E = 26,57$ ans sans vaccination et de $E^* = 29,65$ ans avec vaccination. Cependant, ce dernier calcul ne tient pas compte du risque lié à l'inoculation du vaccin. Notons p' la probabilité de mourir lors de la vaccination (peu après la naissance). On considère que le vaccin est efficace si l'espérance de vie du groupe initial est supérieure en cas de vaccination. Déterminer la valeur maximale de p'.

5.2 Solutions

Exercice 1 : $T'(t) = k(T(t) - T_0)$ pour une certaine constante $k > 0$ dépendant du corps considéré, avec $T(0) = T_0$.

Exercice 2 : $q'(t) = k(100 - q(t))$ pour une certaine constante k, avec $q(0) = 0$.

Exercice 3 : $N'(t) = kN(t)(N_0 - N(t))$ pour une certaine constante $k < 0$, avec $N(0) = N_0$.

Exercice 4 : Nous allons raisonner comme dans l'exemple sur la radioactivité.
Appelons $q(t)$ la quantité de sel présente dans le réservoir après t minutes. La concentration de sel présente à ce moment est alors $c(t) = \dfrac{q(t)}{100}$.
Pendant un instant infinitésimal δt, il s'écoule $2\delta t$ litres d'eau contenant $2\delta t c(t) = \dfrac{q(t)}{50}\delta t$ g de sel, lesquels sont remplacés par $2\delta t$ litres d'eau pure.
Ainsi, $q(t+\delta t) = q(t) - \dfrac{q(t)}{50}\delta t$. D'où $\dfrac{q(t+\delta t) - q(t)}{\delta t} = -\dfrac{q(t)}{50}$.
Faisant tendre δt vers 0, on obtient que pour tout réel $t \geq 0,\ q'(t) = \dfrac{q(t)}{50} q(t)$.
On en déduit immédiatement, puisque $q(0) = 60$ que pour tout réel $t \geq 0,\ q(t) = 60e^{-t/50}$.
Il restera donc au bout d'une heure $q(60) \approx 18\ g$ de sel.

Exercice 5 : D'après l'énoncé, la concentration d'une solution saturée est de $50/100 = 0,5$.
Appelons $q(t)$ la quantité de substance dissoute après t heures. Ainsi, $x(t) = 30 - q(t)$ est la quantité de substance non dissoute après t heures.

1. Comme on plonge 30 g de substance dans 100 g d'eau, l'énoncé se traduit par l'équation différentielle $(E)\ :\ q'(t) = k(30 - q(t))\left(\dfrac{50}{100} - \dfrac{q(t)}{100}\right)$, soit :
   $(E)\ :\ q'(t) = k(30 - q(t))(0,5 - 0,01q(t))$ pour une certaine constante k.
2. Nous cherchons $q(5)$ sachant que $q(0) = 0$ et $q(2) = 10$.
   (E) équivaut à $(E')\ :\ x'(t) = -kx(t)(0,5 - 0,01(30 - x(t)))$, soit :
   $(E')\ :\ x'(t) = -kx(t)(0,2 + 0,01x(t))$. Un dernier effort ...
   $(E')\ :\ x'(t) = -0,2kx(t)(1 + 0,05x(t))$ et on reconnait le modèle logistique. Avec $x(0) = 30,\ x(2) = 20,\ r = -0,2k$ et $K = -\dfrac{1}{0,05} = -20$.
   Pour tout $t \geq 0,\ x(t) = \dfrac{-600}{30 - 50e^{-0,2kt}}$.
   $x(2) = 20$ donne $20 = \dfrac{-600}{30 - 50e^{-0,4k}} \iff 30 - 50e^{-0,4k} = -30 \iff k = -\dfrac{\ln(6/5)}{0,4} \approx -0,456$. Donc pour tout $t \geq 0,\ x(t) = \dfrac{-600}{30 - 50e^{0,0912t}}$. On en déduit $x(5) = 12,27\ g$, d'où $q(5) = 30 - 12,27 = 17,73\ g$.

Exercice 6 : Le volume du réservoir plein est $V_0 = \pi \times 2,5^2 \times 3,5 = 68,72\ m^3$, soit $V_0 = 6,872 \times 10^7\ cm^3$.
La surface du trou de sortie est $S = \pi \times 2,5^2 = 19,63\ cm^2$. En 1 seconde, il s'écoule de ce trou un volume de $19,63 \times 26 \times \sqrt{h(t)}\ cm^3$, soit $510,38\sqrt{h(t)}\ cm^3$, où $h(t)$ est la hauteur d'eau restante dans la cuve, exprimée en cm.
Appelons $V(t)$ la quantité d'eau en cm^3 présente à l'instant t dans le réservoir. Pendant un instant infinitésimal δt, il s'écoule $510,38\sqrt{h(t)}\delta t\ cm^3$.

D'autre part, $V(t)=\pi\times 250^2\times h(t)$, d'où $h(t)=\dfrac{V(t)}{\pi\times 62500}$.
$V(t+\delta t)-V(t) = -1,152\sqrt{V(t)}\delta t$. Divisant par δt que l'on fait tendre vers 0, il vient : $(E)\ :\ V'(t)=-1,152\sqrt{V(t)}$.
$(E) \iff \dfrac{V'(t)}{2\sqrt{V(t)}}=-0,576 \iff \dfrac{d}{dt}\sqrt{V(t)}=-0,576$
$\iff (\exists C\in\mathbb{R}),\ V(t)=(-0,576t+C)^2$.
Or $V_0=6,872\times 10^7$, donc $C=8289,7$ et alors $V(t)=(-0,576t+8289,7)^2$. Le réservoir sera vide si $-0,576t+8289,7=0 \iff t=14392s$, soit au bout d'environ 4 heures.

Exercice 7 : On a : $m\dfrac{dv}{dt}=mg-\dfrac{mgv^2}{25}$ i.e $(E)\ :\ \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{gv^2}{25}+g$.
Soit $(E)\ :\ \dfrac{dv}{dt}=g\left(\dfrac{25-v^2}{25}\right)$.

Ce n'est pas une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants. Le programme de terminale ne permet pas a priori de répondre à cette question.

En revanche, et comme vu à l'exercice 5, on peut penser à un changement de variable pour se ramener à une EDO connue. Puisque $(E)\ :\ \dfrac{dv}{dt}=\dfrac{g}{25}(5-v)(5+v)$, $u=5-v$ ou $u=5+v$ semblent être naturels.
Posons $u=5+v$. On a $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{dv}{dt}$. D'où $\dfrac{du}{dt}=\dfrac{g}{25}u(10-u)$. Ainsi, comme $g\approx 10$, $\dfrac{du}{dt}=4u(1-\dfrac{u}{10})$. On reconnait l'équation logistique avec $r=4$ et $K=10$.
La proposition 3-1-5, nous assure alors, puisque $u(0)=5+v(0)=60$, que pour tout réel $t\geq 0$, $u(t)=\dfrac{600}{60-50e^{-4t}}=\dfrac{60}{6-5e^{-4t}}$. Mais alors, $v(t)=u(t)-5=\dfrac{30+25e^{-4t}}{6-5e^{-4t}}$.

Exercice 8 : un exercice électrique !

1. Laissé aux bons soins du lecteur.
2. $i=\dfrac{dq}{dt}$ et $U=Ri$, donc $U=R\dfrac{dq}{dt}$. Enfin, $U=\dfrac{q}{C}$. On en déduit que $R\dfrac{dq}{dt}=\dfrac{q}{C}$ i.e $(E)\ :\ \dfrac{dq}{dt}=\dfrac{q}{RC}$.
3. Pour tout $t\geq 0$: $q(t)=Ae^{t/RC}$.
   Or $q(0)=q_0=A$, d'où $q(t)=q_0e^{t/RC}$.

Exercice 9 : on prend la tangente !

1. Au point de coordonnées (x,y), la pente de la tangente est égale à $f'(x)$ et par hypothèse : $f'(x)=x^2$. Autrement dit, même si ce n'est pas demandé : $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+k$.
2. En chaque point $(x_0,f(x_0))$ de $\mathcal{C}_f$, l'équation réduite de la tangente s'écrit :
   $T_{x_0}\ :\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.
   T_{x_0} coupe l'axe des ordonnées en $A_{x_0}(f(x_0)-x_0f'(x_0);0)$ et l'axe des abscisses en $B_{x_0}\left(x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)};0\right)$. D'après l'énoncé, on en déduit que :
   $f(x_0)-x_0f'(x_0)+x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2 \iff f(x_0)f'(x_0)-x_0f'(x_0)^2+x_0f'(x_0)-f(x_0)-2f'(x_0)=0$, soit $-x_0f'(x_0)^2+f'(x_0)(x_0-2+f(x_0))-f(x_0)=0$. La variable x_0 étant muette, l'EDO peut s'écrire : $-xy'^2+y'(x-2+y)-y=0$.

3. Procédons par étapes :
   Rappel : Soit un vecteur directeur $\vec{v}(a;b)$ d'une droite D. Alors $\vec{n}(-b;a)$ est un vecteur normal à D.
   Soit $P(x_0;y_0)$ un point quelconque de la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction dérivable f. Sa tangente T_P en P est dirigée par $\vec{v}(1;f'(x_0))$. Un vecteur normal à T_P est $\vec{n}(-f'(x_0);1)$. T_P a pour équation : $y = y_0 - \dfrac{x-x_0}{f'(x_0)}$ et rencontre l'axe des abscisses en $I(x_0+y_0f'(x_0);0)$. Le milieu J de [PI] appartient à l'axe des ordonnées, ce qui signifie que l'abscisse de J est nulle, soit : $x_0 + \dfrac{1}{2}y_0f'(x_0) = 0$. Les variables x_0 et y_0 étant muettes et comme $y_0 = f(x_0)$, l'EDO peut s'écrire : $2x + yy' = 0$.

6 Complément : l'équation de diffusion en 1D

Sans en avoir l'air, cette section s'adresse aux professeurs désireux de donner un sens aux intégrales autre qu'une aire ... Car elles sont bien plus que ça *somme* toute !

6.1 Mise en place de la forme conservative

Définition 1 : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Le **flux** F en x_0 (exprimé en nombres d'individus par unité de temps) est le nombre de particules passant par x_0 par unité de temps. On le note un peu abusivement $F(x_0, t)$. Il est exprimé en **nombre d'individus/s** ou **mol/s**.

Définition 2 : Soit $t_0 \in \mathbb{R}^+$. La **densité** u à $t = t_0$ (exprimé en nombres d'individus par unité de longueur) est le nombre de particules présentes à t_0 par unité de longueur. On la note un peu abusivement $u(x, t_0)$. Elle est exprimée en **nombre d'individus/m** ou **mol/m**.

Corollaire 1 : Ainsi, on peut dire que :

— La quantité de matière passée par le point d'abscisse x_0 entre t_1 et t_2 est égale à

$$\int_{t_1}^{t_2} F(x_0, t)dt$$

— La quantité de matière présente à l'instant t_0 entre les points d'abscisses x_1 et x_2 est égale à

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_0)dx$$

Corollaire 2 : La variation de la quantité de matière dans l'intervalle d'espace $[x_1; x_2]$ entre les instants t_1 et t_2 est égale à la différence entre le "flux de matière entrant" en x_1 et le "flux sortant" en x_2 :

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \{F(x_1, t) - F(x_2, t)\}dt = \int_{x_1}^{x_2} \{u(x, t_2) - u(x, t_1)\}dx} \quad (1)$$

La différence de quantité de matière (entre t_1 et t_2) = ce qui est entré en x_1 moins ce qui est sorti en x_2 pendant cet intervalle de temps.

L'équation précédente (1) peut se réécrire :

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{F(x_1, t) - F(x_2, t)}{x_1 - x_2} dt = \frac{1}{x_1 - x_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{u(x, t_2) - u(x, t_1)}{t_2 - t_1} dx$$

Nous supposons les fonctions u et F suffisamment régulières. Faisant tendre t_2 vers t_1 et x_2 vers x_1, et en s'absolvant momentanément de la justification de l'interversion des limites et intégrales, on obtient :

$$\partial_x F(x, t) = -\partial_t u(x, t) \quad (*)$$

soit

$$\boxed{\partial_x F(x, t) + \partial_t u(x, t) = 0} \quad (2)$$

(*) vient de : $\lim\limits_{t_2 \to t_1} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f = f(t_1)$, de $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{F(x_1, t) - F(x_2, t)}{x_1 - x_2} = \partial_x F(x_1, t)$ et de $\lim\limits_{t_2 \to t_1} \frac{u(x, t_2) - u(x, t_1)}{t_2 - t_1} = \partial_t u(x, t_1)$.

6.2 Mise en place de la forme non conservative

Cas général :
Supposons que le flux F est lui-même fonction de la densité u : $F(x,t) = f(u(x,t))$. Alors l'équation (2) se traduit par :

$$\partial_x f(u(x,t))\partial_x u(x,t) + \partial_t u(x,t) = 0$$

En posant $a(u) = f'(u)$, on a alors :

$$\partial_t u(x,t) + a(u(x,t))\partial_x u(x,t) = 0$$

Remarque : $a(u)$ a la dimension d'une vitesse (en m/s).
Justification heuristique : f est définie sur $\mathbb{R}^+$ (en mol/m) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (en mol/s). Ainsi, la dérivée a de f est définie sur $\mathbb{R}^+$ (en mol/m) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (en $mol.s^{-1}/mol.m^{-1} = m.s^{-1}$).

Cas particuliers importants :

— Supposons que la matière transportée ait une vitesse $v(x,t)$: $F(x,t) = u(x,t)v(x,t)$. L'équation (2) se réécrit alors :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) + \partial_x(u(x,t)v(x,t)) = 0} \quad (3)$$

Cette équation est appelée **équation d'advection** (ou de convection).

— Dans une approche similaire, les variations de densité peuvent être causées par des gradients dans le milieu concerné et les flux aux niveaux des frontières : $-D(x,t)\partial_x u(x,t)$. Le signe "moins" vient du fait que le coefficient D est toujours positif, et exprime que le flux de matière va des endroits où elle est le plus concentrée vers les endroits où elle est le moins concentrée. L'équation (2) se réécrit alors :

$$\boxed{\partial_t u(x,t) - \partial_x(D(x,t)\partial_x u(x,t)) = 0} \quad (4)$$

Cette équation est appelée **équation de diffusion**.

Remarques : L'expression $F(x,t) = -D(x,t)\partial_x u(x,t)$ peut être vue comme une conséquence des lois de transfert de Fick : le flux $F(x,t)$ est proportionnel au gradient de concentration (variation spatiale instantanée de concentration) à travers un coefficient de diffusion $D(x,t)$.
Comme $\partial_x u(x,t)$ a pour dimension $mol.m^{-2}$, $D(x,t)$ a pour dimension $m^2.s^{-1}$ (expansion surfacique par unité de temps).

6.3 L'approche probabiliste

Le but de ce paragraphe est de modéliser l'**équation de diffusion**, incontournable en physique (l'équation de la chaleur en est le modèle type) et en dynamique des populations. L'affichage des résultats nécessite d'avoir installé numpy et scipy.
Commençons par le cas d'une particule se déplaçant sur un axe gradué au cours du temps selon une règle qui sera définie plus tard. Sachant qu'à l'instant initial $t_0 = 0$ la particule est située à la position $x_0 = 0$, quelle est la probabilité $p(t,x)$ de la trouver à une position $x \in \mathbb{R}$ à l'instant $t > 0$?
Si maintenant N particules sont initialement placées à la position $x_0 = 0$, quelle sera la distribution de ces particules, en fonction de x, au temps t ?
On suppose ici que la direction du mouvement actuel de chacune des N particules n'affecte pas la direction du mouvement suivant.

Question 1 : Cas homogène, sans biais directionnel (sans transport) :
On suppose qu'à chaque pas de temps dt, une particule se déplace d'un pas d'espace dx à gauche avec la probabilité L, à droite avec la probabilité R ou reste sur place avec la probabilité $S := 1 - L - R$. On suppose $L = R = 1/3$. On pose $N = 5000$, $dt = 0.01$ et $dx = \sqrt{dt/L}$.
Écrire un script en Python qui modélise le déplacement de ces N particules sur l'intervalle de temps $[0\,;\,10]$, et affiche sous la forme d'un graphique la courbe représentative de $u(t, x)$, densité de particules présentes à l'instant t, à la position x, pour t = 1, 5 et 10.

Question 2 : Cas homogène, avec biais directionnel (avec transport) :
Modifier le script précédent si $R = 1/2$, $L = 1/3$ et $dx = \sqrt{dt/(R + L)}$.
Remarque : On peut aussi considérer le cas **hétérogène** temps/espace.

Analyse du problème Nous allons boucler en temps. La notion de liste va jouer un rôle capital. Nous créerons une liste initiale dénommée listex de toutes les abscisses possibles que les particules peuvent atteindre entre 0 et T (une particule se déplace à droite, à gauche de dx ou reste sur place) à chaque pas de temps dt. La liste dénommée listey, initialisée avec 5000 individus à l'instant initial à la position d'origine (centralisée ici, petit détail technique à programmer) et 0 ailleurs, donnera le nombre de particules présentes à chaque pas de temps. Si à une position donnée de listey, il y a des particules, on appliquera à chacune d'entre elles un test de déplacement dans les trois positions précitées, ce qui modifiera au fur et à mesure listey.

Programmation

Question 1 : Cas homogène, sans biais directionnel

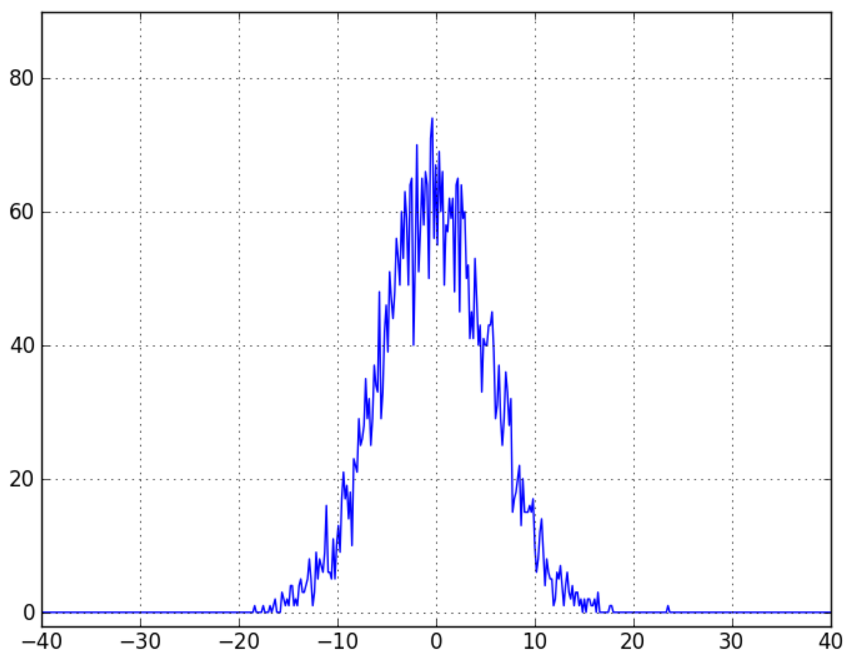
```python
from math import *
from random import *
import matplotlib.pyplot as plt

#initialisation
M,T,t = 1/3,10,0
dt = 0.01
N = int(T/dt)
dx = sqrt(dt/M)
listex = [-N*dx+i*dx for i in range(2*N+1)]
listey = [0 for i in range(2*N+1)]
for k in range(2*N+1) :
    if k != N :
        listey[k] = 0
    else :
        listey[k] = 5000

#Traitement des donnees
while t <= T :
    for j in range(len(listey)) :
        if listey[j] >0 :
            for k in range(listey[j]) :
                alea = random()
                if alea <= 1/3 :
                    listey[j] -= 1
                    listey[j-1] += 1
                elif alea <= 2/3 :
```

```
                        listey[j] -= 1
                        listey[j+1] += 1
30      t=t+dt

    #Sortie
    plt.axis([-40,40,-2,90])
    plt.grid(True)
35  plt.plot(listex,listey)
    plt.show()
```



Question 2 : Cas homogène, avec biais directionnel
Il suffit de modifier les lignes 6 et 9 du script précédent par :

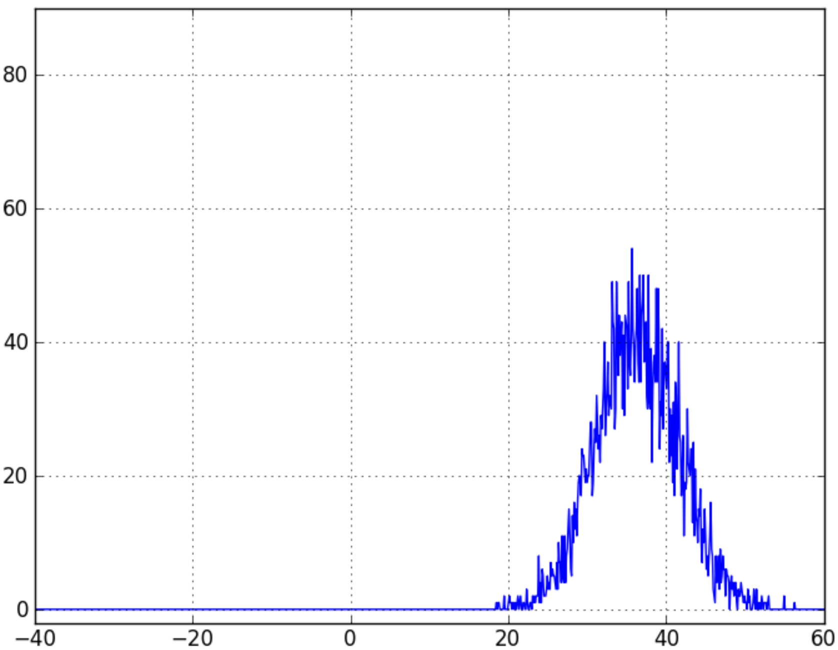
```
L,R,T,t = 1/3,1/2,10,0
```

```
dx = sqrt(dt/(L+R))
```

puis la ligne 27 par :

```
                elif alea <= 5/6 :              #5/6 = 1/3 + 1/2
```

On obtient alors le graphique suivant où le terme d'advection apparaît clairement : la courbe a la même allure que celle obtenue précédemment, mais on a une nette translation vers la droite. La probabilité de se déplacer vers la droite : 1/2 est en effet supérieure à celle de se déplacer vers la gauche : 1/3.



Remarque : Nous nous sommes intéressés à l'évolution de la quantité $p(t, x)$ au cours du temps. En se replaçant dans un espace continu, nous construisons une EDP décrivant l'évolution de la densité de probabilité associée à la position d'un individu au cours du temps. En supposant les N individus **indépendants** (hypothèse Markovienne), nous décrivons ainsi la redistribution de ces N individus.

Remarquons qu'une fois le pas de temps dt choisi, nous avons choisi un pas d'espace dx proportionnel à la racine carrée de dt. Pourquoi ce choix ? Une analyse théorique plus poussée sera faite dans un prochain papier pour répondre entre autres à cette question. Le lien expérimental-théorie sera ainsi parfaitement formulé, où chaque approche enrichit l'autre.

7 Bibliographie - Webographie

1. F. Ayres Jr - Equations différentielles- Schaum
2. F. Berthollin - équations différentielles - Cassini
3. R. Bronson - Equations différentielles Méthodes et applications - Schaum
4. R. Hubbard & B. West (adapté) - `https://www.lpp.polytechnique.fr/IMG/pdf_EquaDiffS4.pdf`
5. L. Uhl - Chimie Questions ouvertes (1ère année CPGE scientifiques) - Ellipses