DATE
14 novembre 2024

EXAMEN
Devoir à la maison
MODULE
-
DURÉE DE L'ÉPREUVE
-

ANNÉE ET FILIÈRE	
Terminale	Spécialité Maths
COMPOSITION DE	
Mathématiques	
NOM DES ENSEIGNANTS	
Yannick LE BASTARD	

DOCUMENTS AUTORISÉS

Calculatrice	PROGRAMMABLE	X	NON PROGRAMMABLE	☐	NON	☐
Autres documents	OUI	X	NON	☐		
Documents autorisés :	Cours et fiche de synthèse sur les suites					

Les exercices sont indépendants. *On portera une attention particulière à la rédaction.*

SUJET

Le soin est une qualité essentielle : aérez votre copie, soulignez ou encadrez proprement vos résultats.

Exercice n° 1. *4 points*

Déterminez si elle existe la limite des suites dont le terme général est donné dans les questions 1 et 2. **Justifiez précisément vos réponses**.

1)

a) $u_n = \dfrac{6n^2+2n-7}{-2n^2+n+1}$

b) $v_n = \dfrac{3n-5\cos n}{n^2}$

c) $w_n = -n+3\cos n$

d) $t_n = e^{-\frac{\sin n}{n}}$

e) $z_n = 3^n - 2^n$

f) $r_0 = 1$ et $r_{n+1} = 3r_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

2)

a) $u_n = (-2)^n + 5$

b) $v_n = -2^n + 5$

Exercice n° 2. *6 points*

1) On rappelle que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 2,5 - 0,9e^{-1,2x}$.

b) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Prouvez par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2,5$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une valeur ℓ dont vous déterminerez une valeur approchée à 0,01 près à l'aide de votre calculatrice.

Attention : Les questions du 2) qui suivent sont plus techniques.

2)

1) Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x} \geq 1 + \dfrac{x}{3}$ d'inconnue $x \in [-1; +\infty[$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \geq 1 + \dfrac{1}{3(n+1)}$.
3) Déterminer un réel $\lambda > 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \dfrac{\lambda}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.
4) En déduire que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{n \geq 1}$ converge. On ne demande pas la valeur de sa limite (vous pourrez penser aux sommes télescopiques pour le membre de gauche).

Exercice n° 3.

6 points

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.
On admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geq 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1)

a) Calculez u_2 et u_3 et proposez une interprétation dans le contexte de l'exercice.
b) Déterminez la seule limite possible ℓ de la suite (u_n).
c) Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$. Prouvez que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9. Exprimer v_n en fonction de n.
d) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

e) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

2)

On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python. Après avoir justifié que la suite (u_n) est croissante, déterminez la valeur renvoyée par la saisie de seuil (8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Exercice n° 4. *4 points*

Vous pourrez utiliser le résultat suivant sans démonstration :

Théorème des suites adjacentes : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :
- (u_n) est croissante,
- (v_n) est décroissante,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$

Alors les deux suites convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

On considère les suites de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$ si $n \geq 1$.

1)

1) Démontrer que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.
2) Démontrer que $(v_n - u_n)$ tend vers 0.
3) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite, que l'on notera e.

2) Démontrer par l'absurde que e est un nombre irrationnel (plus dur).

Remarque : e est bien le nombre d'Euler que vous avez vu en première !

FIN DE L'EXAMEN