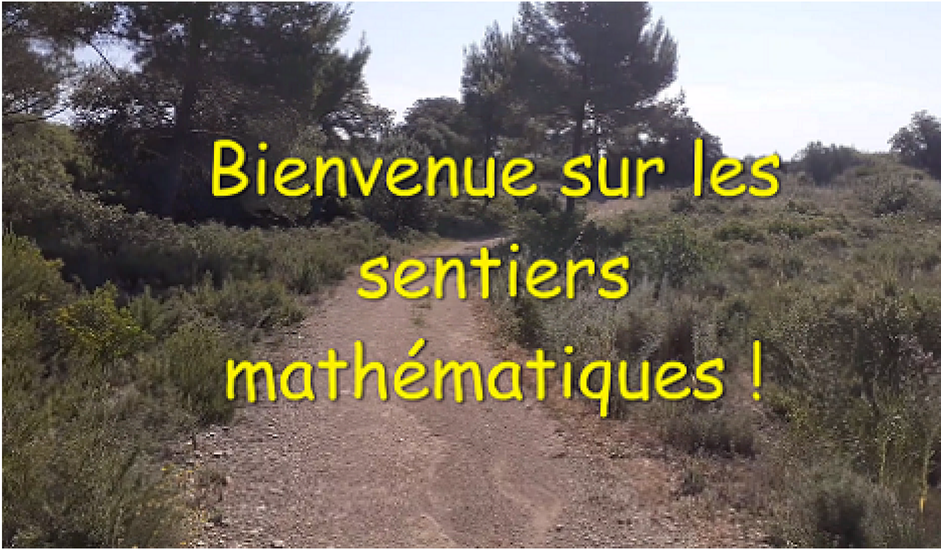
Limite d'une fonction

Approche intuitive
épisode 0 bis : pratique du calcul de limites
Terminale spécialité maths

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

November 3, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Sommaire

Ce diaporama, relativement technique, va vous permettre pour la première fois de parler de **croissance comparée** de fonctions au voisinage d'un réel a ou de l'infini ; bref découvrir un des piliers de l'analyse !
Des méthodes de base seront clairement explicitées pour vous permettre de ne pas "sécher" devant une question un peu technique. Retenez-bien les modèles présentés : les exercices actuels de bac ne sont pas originaux et visent à évaluer vos connaissances et votre savoir-faire technique.

Les fonctions polynômes

Définitions

Ce sont parmi les fonctions usuelles les plus simples :

Définition 1 : Une *fonction polynôme* est une *somme finie de fonction monômes* i.e une somme finie de termes de la forme $a_k x^k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Ainsi, toute fonction polynôme à coefficients réels s'écrit de manière unique sous la forme $\boxed{P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}$, où $a_k \in \mathbb{R}$ et où $n = \max\{k \in \mathbb{N} | a_k \neq 0\}$.

Définition 2 : n s'appelle le *degré* de P. On le note deg(P) ou d°(P). Si $P \equiv 0$, on pose par convention $deg(0) = -\infty$.

Exemple 1 : $P(x) = 3x^4 - 2x^2 + 9x + 4$ est une fonction polynôme de degré 4.

Limites de fonctions monômes

Propriété 1 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a_n x^n \end{cases}$, où $a_n \neq 0$.

Propriété 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = sgn(a_n) \times (+\infty)$$
2. $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} sgn(a_n) \times +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -sgn(a_n) \times +\infty \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Les fonctions polynômes

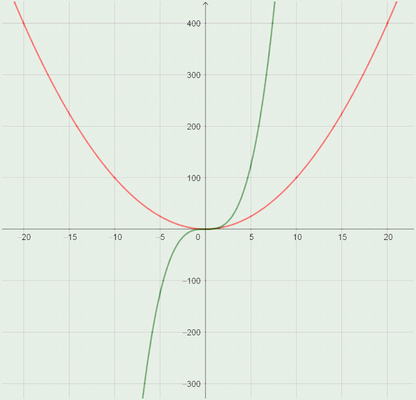
Un premier résultat

<u>**Théorème 1**</u> : La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est égale à celle de son terme de plus haut degré :

$$\text{Si } P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ alors } \lim_{x \to \pm\infty} P(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n.$$

Les fonctions polynômes

Fonctions carrée et cube



$$\lim_{x \to \pm\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to \pm\infty} x^3 = \pm\infty.$$

Dans toute la suite a désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$. En revanche, ℓ désignera toujours un réel.

Limite d'une somme

C'est tout comme pour les suites !

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)+g(x))$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	??

Nous avons à nouveau la **forme indéterminée** $+\infty-\infty$.

Opérations algébriques sur les limites

Limite d'un produit et d'un quotient

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$	$\ell\ell'$	∞	??

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec $g(x)$ de signe cst	0	∞
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	??	??

Nous avons encore les **formes indéterminées** : $0 \times \infty$, $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Croissances comparées

La notion de croissance comparée est très bien introduite dans cette vidéo : `https://www.youtube.com/watch?v=jdLXKJVT0Oc&t=0s`. Il s'agit ici de définir les notions de négligeabilité et d'équivalence pour des suites réelles, mais ceci s'étend sans problèmes aux fonctions au voisinage d'un réel ou de l'infini.

Croissances comparées et exponentielle

Théorème 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

   Remarquez que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^n}$ n'est PAS une forme indéterminée.

2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0.$

Croissances comparées

Croissances comparées et logarithme

Théorème 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$
2. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$
3. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$$
4. $$\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0^-.$$
5. $$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$$

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Ces théorèmes, semblables à ceux rencontrés pour les suites réelles, sont des outils d'EXISTENCE de limites.
Comme précisé au début, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Les théorèmes fondamentaux

1. **Théorème d'encadrement** : Soient f, g, h trois fonctions. Si au voisinage de a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
2. Soient f, g deux fonctions. Si au voisinage de a : $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
3. Soient f, g deux fonctions. Si au voisinage de a : $f(x) \leq g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Quelques calculs de limites

1. Prouvez que si f est une fonction bornée, disons sur $\mathbb{R}$, mais au voisinage de a suffit, et que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.
2. Prouvez que si P est une fonction polynôme, alors : $\lim_{x \to +\infty} P(x)e^{-x} = 0$

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

Quelques calculs de limites

1. Prouvez que si f est une fonction bornée, disons sur $\mathbb{R}$, mais au voisinage de a suffit, et que $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.
2. Prouvez que si P est une fonction polynôme, alors : $\lim_{x \to +\infty} P(x)e^{-x} = 0$

Solution

1. Soit $M > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M$. Alors $-M|g(x)| \leq |f(x)g(x)| \leq M|g(x)|$. Comme $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, on a par encadrement : $\lim_{x \to a} |f(x)g(x)| = 0$, qui équivaut à $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.
2. $P(x)e^{-x}$ est la somme finie de termes $a_k x^k e^{-x}$ qui tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ par croissance comparée. D'où le résultat.

Limites d'un taux d'accroissement

Très utiles à repérer pour lever les formes indéterminées du type $\dfrac{0}{0}$.

Taux d'accroissement en un réel a

Définition 3 : Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On appelle **taux d'accroissement de f en a** la quantité :

$$\tau_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Définition 4 : Si $\lim\limits_{x \to a} \tau_a f(x)$ existe et est finie, cette limite se note $f'(a)$ et s'appelle le **nombre dérivé de f en a** :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Limites d'un taux d'accroissement

Exemples

Déterminez les limites des fonctions qui suivent au réel précisé :

1. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0.
2. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0.

Limites d'un taux d'accroissement

Exemples

Déterminez les limites des fonctions qui suivent au réel précisé :

1. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0.
2. $h(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0.

Solutions

1. On reconnait $\tau_0 \exp(x)$: $g(x) = \dfrac{e^x - e^0}{x - 0}$. Comme exp est dérivable en 0 avec $exp'(0) = exp(0) = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$.
2. On reconnait $\tau_0 \sin(x)$: $h(x) = \dfrac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$. Comme sin est dérivable en 0 avec $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 1$.

Synthèse

Méthodes usuelles de détermination d'une limite

1. Se servir du signe de l'expression
2. Factoriser par le terme prépondérant
3. Utiliser les croissances comparées
4. Composition et changement de variable
5. La méthode de la quantité conjuguée
6. Utiliser un taux d'accroissement

Exemple 1 : se servir du signe de l'expression

Déterminez la limite de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$ aux bornes de son ensemble de définition.

Exemple 1 : se servir du signe de l'expression

Déterminez la limite de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$ aux bornes de son ensemble de définition.

Solution : $D_f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

<u>En $-\infty$</u> : $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - x = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
La droite D d'équation $y = 0$ est **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $\pm\infty$.

<u>En 2</u> : f n'admet pas de limite en 2, mais une limite à gauche et une limite à droite.

$\lim\limits_{x \to 2^-} 3 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} 2 - x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$.
La droite Δ d'équation $x = 2$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

Exercices

Étudier les limites des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6}$
2. $g(x) = \dfrac{x-1}{(2x-3)^2}$
3. $h(x) = \dfrac{-2}{e^x - 1}$

Synthèse

Exemple 2 : factoriser par le terme prépondérant

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{7x^3 + x^2 + 3x + 1}$.

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exemple 2 : factoriser par le terme prépondérant

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{7x^3 + x^2 + 3x + 1}$.
Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Solution : f est une fonction rationnelle. Tout comme pour les suites numériques :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}$$

La droite D d'équation $y = \dfrac{2}{7}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Synthèse

Exemple 2 bis : factoriser par le terme prépondérant

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5\cos(x)}{4x^2 + x + 1}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exemple 2 bis : factoriser par le terme prépondérant

Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5\cos(x)}{4x^2 + x + 1}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Solution : Pour tout réel $x > 0$: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$. D'où :

$$3x^2 - 5 \leq 3x^2 + 5\cos(x) \leq 3x^2 + 5$$

Divisant par $4x^2 + x + 1 > 0$:

$$\frac{3x^2 - 5}{4x^2 + x + 1} \leq f(x) \leq \frac{3x^2 + 5}{4x^2 + x + 1}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 - 5}{4x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 5}{4x^2 + x + 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{4x^2} = \dfrac{3}{4}$.

Donc par le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{3}{4}$.

Exemple 3 : utiliser les croissances comparées

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} - \dfrac{2\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Exemple 3 : utiliser les croissances comparées

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} - \dfrac{2\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Solution : Par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 e^{-x} = 0$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0.$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

La droite D d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Composition de limites

Théorème de composition des limites : Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et si $\lim_{x \to \ell} g(x) = L$, alors : $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = L$.

Exercice 4 : composition et changement de variable

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$.

Composition de limites

Théorème de composition des limites : Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et si $\lim_{x\to \ell} g(x) = L$, alors : $\lim_{x\to a} g\circ f(x) = L$.

Exercice 4 : composition et changement de variable

Déterminer $\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$.

Solution : Posons $X = x^2$.

$\lim_{x\to +\infty} X = +\infty$ et par croissance comparée $\lim_{X\to +\infty} Xe^{-X} = 0$, donc par composition des limites :

$$\lim_{x\to +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

Synthèse

Exercices

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{3x^2+1}{x^2+3}}$ en $-\infty$ et en 0.
2. $g(x) = x^2 e^{-2x}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}$ en $+\infty$ et en 0.

Synthèse

Exemple 5 : quantité conjuguée et composition

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ où $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 10} - \sqrt{x^4 + 4x^2 + 1}$.

L'expression de $f(x)$ nous donne l'idée d'utiliser la technique de la quantité conjuguée : $f(x) =$

$$\frac{(\sqrt{x^4 + 3x^2 + 10} - \sqrt{x^4 + 4x^2 + 1})(\sqrt{x^4 + 3x^2 + 10} + \sqrt{x^4 + 4x^2 + 1})}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 10} + \sqrt{x^4 + 4x^2 + 1}}$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{\sqrt{x^4 + 3x^2 + 10} + \sqrt{x^4 + 4x^2 + 1}}$$

Posons pour tout $x > 0$: $D(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 10} + \sqrt{x^4 + 4x^2 + 1}$.

$$D(x) = x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^4}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right)$$

Exemple 5 (suite)

Nous avons donc :

$$f(x) = \frac{9}{D(x)} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^4}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}}}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^4} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x} = 1$, donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{10}{x^4}} = 1$. De même, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = 1$.

Nous en déduisons que $\lim\limits_{x \to +\infty} D(x) = +\infty$, puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$.

La droite D d'équation $y = -\frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Exemple 6 : utiliser un taux d'accroissement

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.

Exemple 6 : utiliser un taux d'accroissement

Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$.

Solution : On reconnait dans l'expression précédente le taux d'accroissement de la fonction cosinus en 0 :

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\cos(x) - \cos(0)}{x - 0}$$

La fonction cosinus étant dérivable en 0, avec $\cos' = -\sin$, nous avons :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = -\sin(0) = 0$$

Synthèse

Exercices

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$ en 0. (on exprimera $\cos(x) - 1$ à l'aide de la fonction sinus)
2. $g(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\tan(2x)}$ en 0.
3. $h(x) = \dfrac{\cos(3x)}{\cos(5x)}$ en $\dfrac{\pi}{2}$.