Plus sur les suites récurrentes (épisode 1)

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

15 octobre 2024

Table des matières

1 Le raisonnement par récurrence

Vous fréquentez l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ depuis votre plus tendre enfance où vous avez appris à compter sur vos doigts, puis appris vos tables d'addition et de multiplication. Pour autant, sauriez-vous définir $\mathbb{N}$?
Sa construction n'est pas au programme du secondaire, mais certaines de ses propriétés si ! Nous résumons donc ci-dessous les axiomes qui sont à la base de sa définition et qui permettent ensuite d'établir de nombreuses propriétés.

Axiomes de Peano : Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ dont les éléments sont appelés les entiers naturels, un élément $0 \in \mathbb{N}$ appelé zéro et une application $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dite *application successeur*, vérifiant les propriétés suivantes :

1. 0 n'est le successeur d'aucun entier,
2. Deux nombres entiers qui ont le même successeur sont égaux,
3. Si $A \subset \mathbb{N}$ est tel que $\begin{cases} 0 \in A \\ s(A) \subset A \end{cases}$, alors $A = \mathbb{N}$.

Le point 3 définit le principe de récurrence, d'une utilité capitale en analyse et que nous allons reformuler de manière pragmatique et pratique sous la forme suivante :

Principe de récurrence **(récurrence simple) :** Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Initialisation : Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
Hérédité : Si pour tout entier naturel n, le fait que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie entraine que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie,
Conclusion : Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

On peut se représenter le principe de récurrence comme celui qui nous permet de monter une échelle infinie : le barreau du bas est numéroté 0, puis son successeur est numéroté 1, etc.
L'initialisation nous permet de mettre le pied sur le premier barreau 0 ; l'hérédité nous dit que si l'on a le pied sur le barreau n, alors on peut grimper au barreau suivant $n+1$ et ceci quelle que soit la valeur de n. Bref, avoir le droit de poser le pied sur le premier barreau et le droit de passer d'un barreau à son successeur nous permet de grimper notre échelle infinie.
Remarquons enfin que l'on peut remplacer 0 par tout autre entier n_0, auquel cas la conclusion devient : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieur ou égal à n_0.

Exemple 1-1 : Prouvons que pour tout entier naturel n non nul :

1. $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démonstration : voir aussi `https://www.youtube.com/watch?v=a6AWclssIF4`

1. Posons pour tout entier naturel n non nul : $\mathcal{P}(n) : 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Initialisation : $1 = \dfrac{1+1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
   Par hypothèse de récurrence : $1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
   Or $\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1) = \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : on a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraine $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n non nuls *i.e* pour tout entier naturel n non nul : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Posons pour tout entier naturel n non nul : $\mathcal{P}(n) : 1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Initialisation : $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6} = 1 = 1^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$
   i.e $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
   Par hypothèse de récurrence, $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$.
   Or $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$.

Et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \dfrac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$.
Enfin, comme $n(2n+1)+6(n+1) = 2n^2+7n+6 = (n+2)(2n+3)$, on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : on a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraine $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n non nuls *i.e* pour tout entier naturel n non nul : $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

† † † Il convient de rédiger parfaitement vos récurrences. Signalons quelques erreurs souvent commises et qui n'en sont pas moins abominables ! Voici le top 3 :

— N°3 : Dans l'hérédité, on suppose que **POUR UN CERTAIN** n donné, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, qui peut se traduire par "*il existe* un entier naturel n" *tel que* $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors que l'hérédité repose sur le principe "*Pour tout* entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraine $\mathcal{P}(n+1)$ vraie". Vous apprendrez ceci dans le supérieur avec les quantificateurs existentiels et universels.
— N°2 : **OUBLIER L'INITIALISATION** ! Grandes ou petites valeurs, le problème reste le même ; et puis pour reprendre l'heuristique de l'échelle, comment grimper le long de l'échelle si vous n'avez pas le droit de poser le pied dessus ?
— N°1 : Et enfin **LA PIRE DES ERREURS** qui consiste à prendre pour hypothèse de récurrence : "Supposons que POUR TOUT entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie". Autrement dit, vous prenez pour hypothèse exactement ce que vous cherchez à prouver !

Exemple 1-2 Considérons la suite $\mathbf{u}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. La première chose à vérifier est que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie, c'est-à-dire que l'on puisse calculer u_n pour n'importe quelle valeur de l'entier n.
   (a) ´Etudier les variations de $f\colon [-1;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$ et justifier que si $x \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) \in \mathbb{R}^+$ (on dit que l'intervalle $[0;+\infty[$ est *stable* par f).
   (b) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et que $u_n \geq 0$.
2. On suppose ici que $u_0 = 0$. Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 à u_3 à l'aide du graphe de f et de la droite D d'équation $y = x$ (la première bissectrice). Vers quelle valeur ℓ semblent se rapprocher les termes u_n ? (on pourra résoudre l'équation $f(x) = x$)
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$. Que dire sur la monotonie de $\mathbf{u}$? $\mathbf{u}$ est-elle minorée, majorée, bornée ?
4. Si l'on choisit $u_0 > \ell$, par exemple $u_0 = 2,5$, quel semble être le comportement de $\mathbf{u}$? Justifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout entier naturel n : $\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$.
5. Conclure selon la valeur initiale de $u_0 \in [-1;+\infty[$ de la limite éventuelle de la suite $\mathbf{u}$.
6. Qu'en est-il si $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f\colon [0;+\infty[\to [0;+\infty[, x \mapsto x^2$? Vous préciserez selon la valeur de u_0 la convergence ou divergence éventuelle de $\mathbf{u}$. En revanche, vous prouverez de manière précise par récurrence la monotonie de $\mathbf{u}$ et son éventuel caractère minoré ou majoré. Let's play !

Solution : Nous verrons en exercice comment prolonger cet exercice et prouver de manière effective les résultats subodorés.

1. (a) $u\colon [-1;+\infty[\to \mathbb{R}^+, x\mapsto x+1$ est strictement croissante et $v\colon \mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+, x\mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, donc par composition $f = v\circ u$ est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.

   (b) Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
   Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie !
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque ; supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : u_n existe et $u_n \geq 0$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, u_{n+1} existe et par croissance de f : $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(0) = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

2. Il semble que la suite $\mathbf{u}$ converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la première bissectrice, ce qui revient à déterminer la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $\sqrt{1+x} = x$. Cette équation équivaut à : $\begin{cases} 1+x = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ *i.e* $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

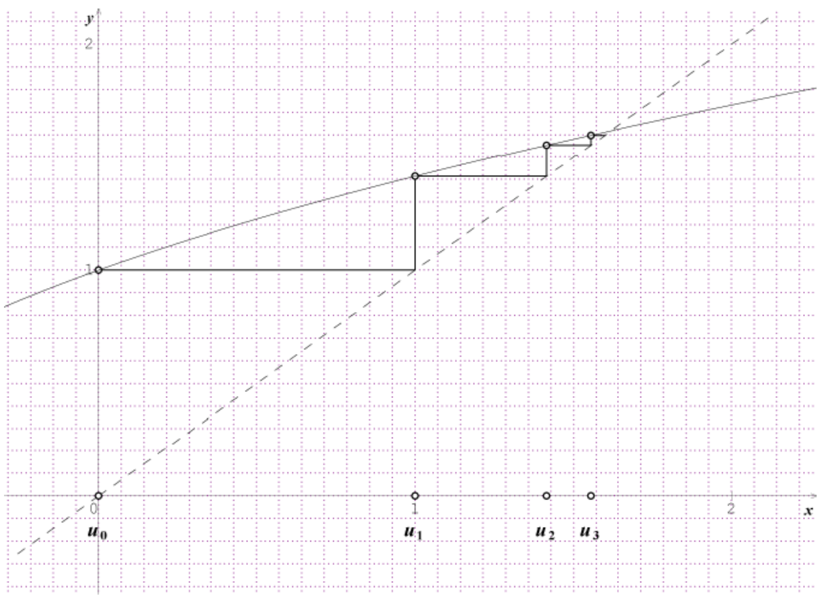

FIGURE 1 – Avec $u_0 = 0$

3. Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$.
   Initialisation : $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0) = 1$ et $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \ell$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$.
   Prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ell$.
   Par croissance de f sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\ell)$ i.e $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ell$ car $f(\ell) = \ell$. D'où $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ell$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$.
   On en déduit que la suite $\mathbf{u}$ est croissante et bornée (minorée par 0 et majorée par ℓ).

4. Traçons les premiers termes de $\mathbf{u}$.
   Là encore, ils semblent se rapprocher de ℓ.
   Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: $\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   Initialisation : Soit $u_0 > \ell$. $u_1 = f(u_0) > f(\ell)$ par stricte croissance de f. Comme $f(\ell) = \ell$, on a $u_1 > \ell$. Enfin, $u_1 - u_0 = \sqrt{1+u_0} - u_0 = \dfrac{1+u_0-u_0^2}{\sqrt{1+u_0}+u_0}$. Mais le trinôme

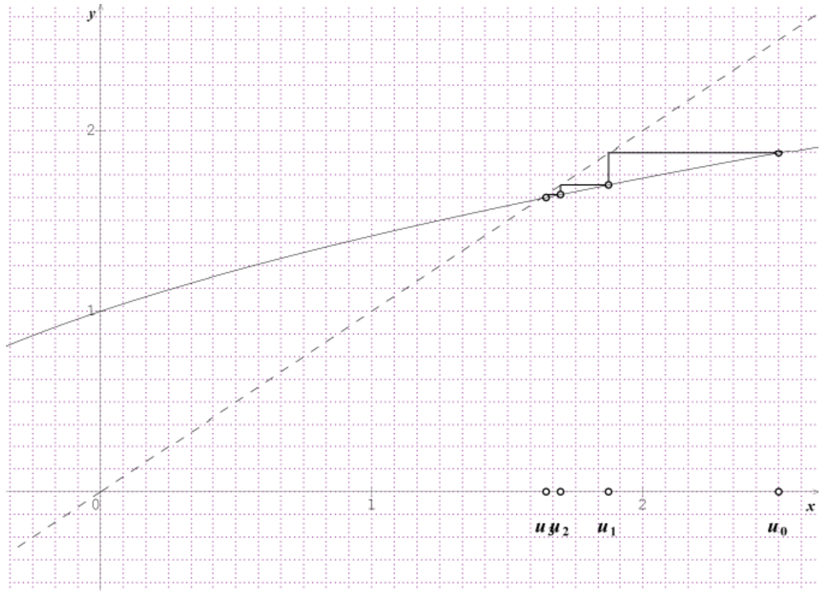

FIGURE 2 – Avec $u_0 = 2,5$

$1 + x - x^2$ prend des valeurs strictement négatives quand $x > \ell$, et comme $u_0 > \ell$, $1 + u_0 - u_0^2 < 0$, donc $u_1 - u_0 < 0$. D'où $\ell < u_1 < u_0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Paradoxalement, ce sera plus simple que l'initialisation ! Donnons-nous un entier naturel n quelconque et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie :$\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$. Par croissance de f : $\ell = f(\ell) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2} \leq f(u_n) = u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$. On en déduit en particulier que si $u_0 > \ell$, la suite $\mathbf{u}$ est décroissante et minorée par ℓ.
Il semble là encore que les termes u_n se rapprochent de ℓ.

5. — Pour tout réel $u_0 \geq 0$, il semble que u converge vers ℓ : en croissant si $u_0 \in [0; \ell[$, en décroissant si $u_0 > \ell$, et en stagnant (suite constante) si $u_0 = \ell$ (récurrence triviale).
   — Si $u_0 \in [-1; 0[$, alors $u_1 \in [0; 1[\subset [0; \ell[$, et on est ramené au cas précédent.
6. Laissé à la sagacité du lecteur. Nous vous donnons le graphe utile à vos supputations.

Il est parfois nécessaire de modifier le principe énoncé précédemment afin de prouver qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n (éventuellement apcr). C'est le cas notamment lorsqu'une suite est définie par une récurrence d'ordre 2 : u_0, u_1 donnés et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = f(n, u_n, u_{n+1})$. Énonçons le ...

Principe de récurrence (récurrence double) : Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Initialisation : Si $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,
Hérédité : Si pour tout entier naturel n, le fait que $\mathcal{P}(n)$ et que $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies entraine que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie,
Conclusion : Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

Exemple 1-3 : On note $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{u_n + u_{n+1} + 3}$. Prouver que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie, croissante et majorée par 3.

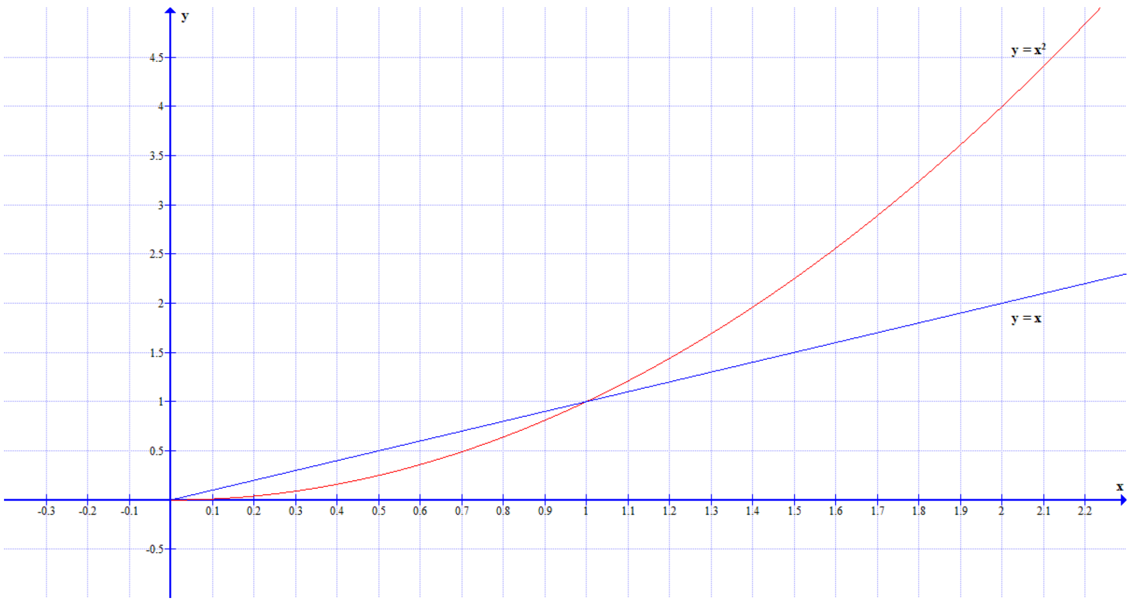

FIGURE 3 – Avec $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = u_n^2$

Solution : Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}(n)$: u_n, et u_{n+1} sont bien définis et $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ sont bien définis et $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $u_2 = \sqrt{0+1+3} = 2$ est bien défini et on a $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies : u_n, u_{n+1} et u_{n+2} sont bien définis et $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. Prouvons que $\mathcal{P}(n+2)$ vraie : u_{n+2} et u_{n+3} sont bien définis et $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+3} \leq 3$.
Par hypothèse, u_{n+2} est bien défini et comme $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+2} \geq 0$, $u_{n+3} = \sqrt{u_{n+1} + u_{n+2} + 3}$ est bien défini. De plus, par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n + u_{n+1} + 3 \leq u_{n+1} + u_{n+2} + 3 \leq 3+3+3 = 9$. Par croissance de la fonction racine carrée : $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+3} \leq 3$, donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}$ est croissante et majorée par 3.

Voir aussi `https://www.youtube.com/watch?v=G_KqFsucyBs`

Dans certains cas, il est même nécessaire de considérer le cas de tous les $\mathcal{P}(k),\ 0 \leq k \leq n$.

Principe de récurrence (récurrence forte) : Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Initialisation : Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
Hérédité : Si pour tout entier naturel n donné, le fait que tous les $\mathcal{P}(k)$ soient vraies (pour k compris entre 0 et n) entraine que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie,
Conclusion : Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

Exemple 1-4 : Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Prouvons que pour tout entier naturel n : $u_n \leq 2^n u_0$.

Solution : Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq 2^n u_0$.
Initialisation : $u_0 = 2^0 u_0 \leq 2^0 u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(0),\ \mathcal{P}(1), \dots \mathcal{P}(n)$ vraies et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ vraie : $u_{n+1} \leq 2^{n+1}u_0$.
$u_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = u_0 \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \leq 2^{n+1}u_0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout entier naturel n : $u_n \leq 2^n u_0$.

Remarque 1-5 : il existe d'autres formes de récurrence : triple, descendante, limitée, etc. Nous en verrons quelques unes en exercice, mais déjà, maitriser correctement celles qui sont présentées ci-dessus est un bon début. Le raisonnement par récurrence est très courant en mathématiques et s'applique à de nombreuses situations qui dépassent largement le thème de cet article. Voir `https://www.youtube.com/watch?v=muOBEu3NAu8`

2 Suites récurrentes d'ordre 1 : méthodes d'approche élémentaires

Rappelons qu'une suite $\mathbf{u}$ est définie par récurrence (d'ordre 1) si les termes u_n sont définis par la donnée du terme initial u_0 et pour tout entier naturel n par une relation du type $u_{n+1} = f(n, u_n)$ ou dans la plupart des cas par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Nous parlons de *récurrence d'ordre 1* car pour calculer le terme $u_n,\ n \in \mathbb{N}^*$, il suffit de connaître la valeur de son unique prédecesseur.
Autrement dit, nous calculons les termes de la suite $\mathbf{u}$ de proche en proche. Lorsque cela est possible, on peut exprimer directement u_n en fonction de n, autrement dit définir la suite de manière explicite. Deux exemples importants sont :

1. **Les suites arithmétiques** définies par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = u_n + r$$

   On prouve aisément par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

2. **Les suites géométriques** définies par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = qu_n$$

   On prouve aisément par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Il n'est pas toujours évident, pour ne pas dire presque toujours impossible, d'obtenir une expression explicite de u_n en fonction de n. Mais lorsque cela est possible, bingo !

Exemple 2-1 : Une suite homographique.
Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2}$.

Étape 1 : Justifier que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie.
Il suffit pour cela de prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \neq -2$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$.
On prouve sans difficulté par une étude de fonction ou en remarquant que $f(x) = \dfrac{2(x+2)-1}{x+3} = 2 - \dfrac{1}{x+3}$ que f est strictement croissante sur $]-\infty;-2[$ et sur $]-2;+\infty[$.
Comme $f(1) = 1,75$, ceci prouve que pour tout réel $x \geq 1,\ f(x) \geq 1$: on dit que l'intervalle $[1;+\infty[$ est *stable* par f. Cette condition, retenez la bien, est suffisante pour assurer que tous

les u_n sont bien définis et on a en plus que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 1$.
Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geq 1$.
Initialisation : $u_0 = 1 \geq 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : u_{n+1} existe et $u_{n+1} \geq 1$. Par hypothèse, u_n existe et $u_n \geq 1$. Comme f est définie sur $[1;+\infty[$, $u_{n+1} = f(u_n)$ existe et par croissance de f sur $[1;+\infty[$, on a $f(u_n) \geq f(1)$ *i.e* $u_{n+1} \geq 1,75 \geq 1$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout entier naturel n : u_n existe et $u_n \geq 1$.

Étape 2 : Déterminer les limites éventuelles de $\mathbf{u}$.
On résout l'équation $f(x) = x$ sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et on garde la solution appartenant à $I = [1;+\infty[$.
En effet, f est continue sur $I = [1;+\infty[$, et comme $\mathbf{u}$ est à valeurs dans I, si u converge vers ℓ, alors en passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient : $\ell = f(\ell)$ *i.e* ℓ est un point fixe de f.
Or :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{2x+3}{x+2} = x \\ &\iff x \neq -2 \text{ et } x^2 = 3 \\ &\iff x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \end{aligned}$$

D'après l'étape 1, on sait que $\mathbf{u}$ est à valeurs strictement positives, donc la seule limite possible est $\ell = \sqrt{3}$.

Étape 3 : Justifier que $\mathbf{u}$ converge vers $\sqrt{3}$.
Commençons par une petite inspection graphique des premiers termes de la suite.

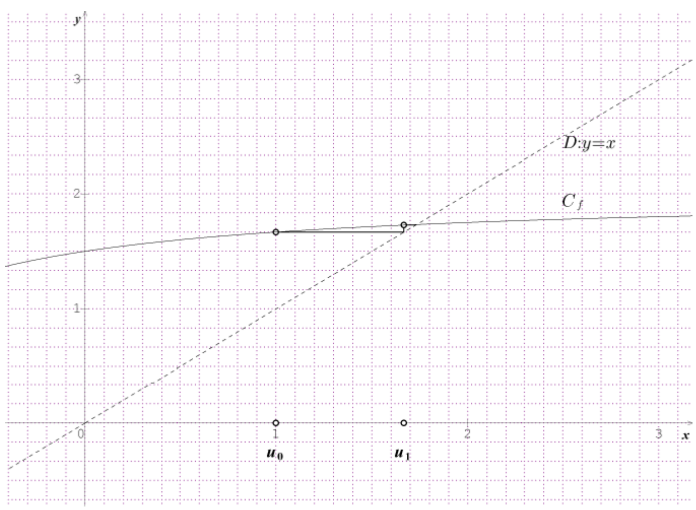

Figure 4 – $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n+3}{u_n+2}$

Très rapidement, il semble que la suite $\mathbf{u}$ soit croissante et majorée par $\sqrt{3}$. Prouvons-le rigoureusement par récurrence !
Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.
Initialisation : $u_1 = \dfrac{2 \times 1 + 3}{1+2} = \dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $\sqrt{3} \approx 1,73$. On a bien $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq \sqrt{3}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque. Supposons $\mathcal{P}(n)$: $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$ vraie.

Par croissance de f sur $[1;+\infty[$: $1 \leq f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$, soit :
$1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \sqrt{3}$, d'où $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$.

Croissante et majorée, le théorème de la limite monotone nous assure que la suite $\mathbf{u}$ converge. Et comme la seule limite possible est $\ell = \sqrt{3}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$.

Remarque 2-2 : L'étude de l'exemple précédent nous permet de délimiter quelques pistes d'approche des suites récurrentes d'ordre 1 :

1. Une suite récurrente est parfaitement définie si son premier terme u_0 appartient à une *partie D stable* par la fonction f. En particulier, la récurrence de l'étape 1 est inutilement lourde car dès que u_0 appartient à D, $u_1 = f(u_0)$ appartient aussi à D, et comme $u_n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{\text{n fois}}(u_0)$, tous les termes u_n appartiennent à D.
   En particulier, si la partie D est minorée (resp. majorée, resp. bornée), on obtient directement que la suite $\mathbf{u}$ est minorée (resp. majorée, resp. bornée). C'est le cas dans notre exemple où $[1;\sqrt{3}]$ est stable par f.
2. Pour étudier le sens de variation de $\mathbf{u}$:
   Option 1 : si la fonction f est croissante sur une partie stable D, alors pour n'importe quel $u_0 \in D$:
   — Si $u_0 \leq u_1$, alors $\mathbf{u}$ est croissante.
   — Si $u_0 \geq u_1$, alors $\mathbf{u}$ est décroissante.
   Dit autrement, si f est croissante sur un intervalle stable D, alors la suite $\mathbf{u}$ est monotone et son sens de variation dépend des positions respectives de u_0 et de u_1.
   † † † Ceci ne s'applique pas au cas où f est décroissante ou si D n'est pas un intervalle stable par f.
   Option 2 : Si $f(x) \geq x$ pour tout $x \in D$, alors $\mathbf{u}$ est croissante, alors que si $f(x) \leq x$ pour tout $x \in D$, $\mathbf{u}$ est décroissante.
   C'est donc le signe de la fonction $g\colon x \mapsto f(x) - x$ qui nous renseigne sur la monotonie de $\mathbf{u}$ (interprétez ceci graphiquement).
3. Enfin, les théorèmes de la limite monotones sont un puissant outil pour déterminer l'existence d'une limite. Cette dernière est à rechercher parmi les points fixes de f.

L'exemple qui suit traite le cas où la fonction f est décroissante. Mais dans notre grande générosité, nous vous donnons quelques outils (Hors programme) permettant d'aborder ce cas.

Considérons une suite $\mathbf{u}$ de terme général u_n. Si l'on observe uniquement les termes de $\mathbf{u}$ d'indices pairs, on obtient une nouvelle suite que l'on note $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple si pour tout entier naturel n, $u_n = n^2$: $(0,1,4,9,16,25,36,49,64,\dots)$, alors $u_{2n} = (2n)^2 = 4n^2$: $(0,4,16,36,64,\dots)$. De même, on peut extraire de $\mathbf{u}$ les termes d'indices impairs qui forment une nouvelle suite que l'on note $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des *suites extraites* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou encore des *sous-suites* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous verrons qu'elles jouent un rôle particulier dans le cas des suites définies par récurrence où $f\colon D \to D$ (ainsi D est stable par f) est décroissante.

Résultat 1 : On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une des suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
On prouve que deux suites adjacentes convergent vers la même limite ℓ (Exercice n°1).

Résultat 2 : Si les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ aussi.
C'est le cas notamment si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Nous voici à présent outillés pour aborder ce second exemple. Nous le traiterons de deux façons : avec les outils standards du programme de Maths spécialité (mais il faudra un peu de technique quand même !) et avec les outils présentés ci-avant.

Exemple 2-3 : Étudier la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 2 - \sqrt{1+u_n}$.

Étape 1 : Justifier que la suite **u** est bien définie.
Il suffit pour cela de prouver que pour tout entier naturel n, $u_n > -1$. Étudions pour cela la fonction f définie sur $[-1;+\infty[$ par $f(x) = 2 - \sqrt{1+x}$. On établit rapidement que f est strictement décroissante sur $D = [-1;+\infty[$. Regardons les premiers termes de notre suite :

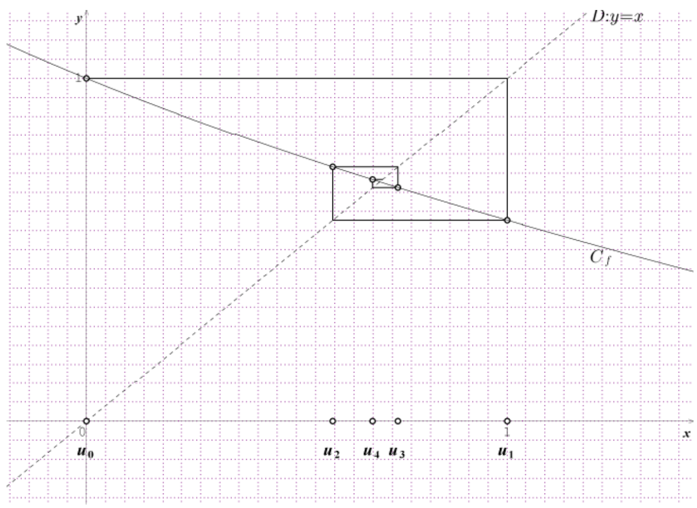

FIGURE 5 – $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2 - \sqrt{u_n + 1}$

Il semble que tous les termes de la suite soient compris entre 0 et 1. Or $f([0;1]) = [2-\sqrt{2};1] \subset [0;1]$: l'intervalle $I = [0;1]$ est stable par f. Comme $u_0 = 0 \in I$, tous les termes de la suite sont bien définis et compris entre 0 et 1 !

Étape 2 : Déterminer les limites éventuelles de **u**.
On résout l'équation $f(x) = x$ sur $D = [-1;+\infty[$ et on garde la ou les solutions appartenant à $I = [0;1]$. Graphiquement, il n'y en a qu'une ...
Or :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 2 - \sqrt{x+1} = x \\ &\iff x \geq -1 \text{ et } 2 - x \geq 0 \text{ et } (2-x)^2 = 1 + x \\ &\iff x \in [-1;2] \text{ et } x^2 - 5x + 3 = 0 \\ &\iff x = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \approx 0,697 \end{aligned}$$

D'après l'étape 1, on sait que **u** est à valeurs dans $I = [0;1]$, donc la seule limite possible est $\ell = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$.

Étape 3 : Prouver la convergence de $\mathbf{u}$ vers $\ell = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$. Nous remarquons graphiquement que pour tout entier naturel n : $u_{2n} < \ell < u_{2n+1}$.
Une approche naturelle est de tenter de prouver que $(u_{2n} - u_{2n+1})$ tend vers 0. En ayant bien sûr montré auparavant que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires. Ainsi, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite. Comme la seule limite possible est $\ell = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2}$, $\mathbf{u}$ convergera vers ℓ.
Mais nous pouvons raisonner plus directement en prouvant que $|u_n - \ell|$ tend vers 0.
Pour ceci, donnons-nous un entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| = |\sqrt{1+\ell} - \sqrt{1+u_n}| = \frac{|\ell - u_n|}{\sqrt{1+\ell} + \sqrt{1+u_n}}$$

Mais comme $u_n > 0$ et $\ell > 0$, on a par croissance de la fonction racine carrée : $\sqrt{1+\ell} + \sqrt{1+u_n} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$. D'où : $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{|u_n - \ell|}{2}$.

Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier naturel n : $|u_n - \ell| \leq \dfrac{|u_0 - \ell|}{2^n}$.

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_0 - \ell|}{2^n} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Vous pouvez faire ici les exercices 1 à 4. Ils sont tous guidés comme de coutume dans le secondaire. Mais les décortiquer, retenir les méthodes mises en oeuvre est déjà un pas vers le supérieur.

3 Suites arithmético-géométriques

Les probabilités sont un environnement très riche de réflexion dans lequel les suites ne manquent pas d'apparaître naturellement. Nous nous bornerons ici à quelques situations classiques ou plus exotiques, mais dans le respect des programmes du secondaire. L'approche fréquentiste des probabilités sera également employée à travers le langage de programmation Python.

3.1 Suites arithmético-géométriques et probabilités

Exemple 3-1-1 : Xavier, plein de bonne volonté, décide de se remettre au sport tous les jours dès le deux janvier 2024. La probabilité qu'il fasse une activité physique le 02/01/2024 est de 0,25. S'il fait du sport un jour donné, la probabilité qu'il en fasse le lendemain est de 0,7. S'il ne fait pas de sport un jour donné, la probabilité qu'il en fasse le lendemain est de 0,4. On note A_n l'événement : "faire du sport n jours après le 02/01/2024" et on u_n la probabilité qu'il fasse du sport le $n-$ème jour après le 02/01/2024".

1. Exprimer une relation de récurrence liant u_{n+1} à u_n sous la forme : $u_{n+1} = au_n + b$.
2. Résoudre l'équation $x = ax + b$. On note α son unique solution.
3. Soit $\mathbf{v}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$. Justifier que $\mathbf{v}$ est une suite géométrique puis en déduire une expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire enfin une expression de u_n en fonction de n, puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Solution : Les arbres de probabilités sont un incontournable du secondaire et permettent d'appréhender de manière naturelle les formules des probabilités totales et des probabilités composées. Leur côté visuel est très parlant et leur utilisation aisée.

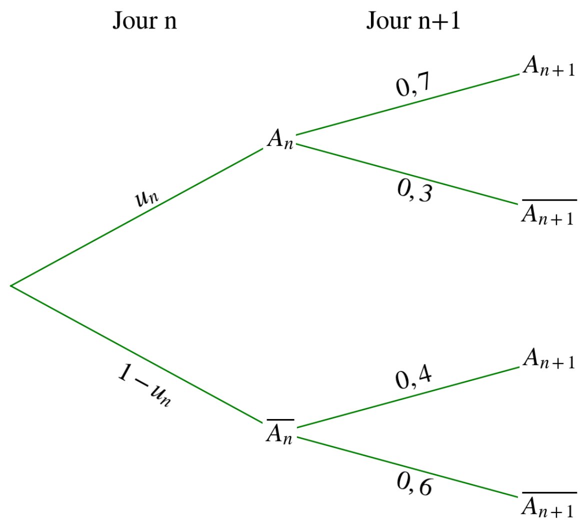

FIGURE 6 – arbre de probabilités

1. La formule des probabilités totales nous dit, puisque $\{A_n, \overline{A_n}\}$ est un système complet d'événements, que $u_{n+1} = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1})$, donc d'après la formule des probabilités composées, $u_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n})P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
   On en déduit que $u_{n+1} = 0,7u_n + 0,4(1 - u_n)$ $i.e$ $u_{n+1} = 0,3u_n + 0,4$.
2. On résout $x = 0,3x + 0,4$, ce qui donne immédiatement $x = \frac{4}{7}$.
3. Soit n un entier naturel quelconque. $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{4}{7} = \frac{3}{10}u_n + \frac{4}{10} - \frac{4}{7} = \frac{3}{10}u_n - \frac{12}{70} = \frac{3}{10}(u_n - \frac{4}{7}) = 0,3v_n$. On en déduit que $\mathbf{v}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,3$.
   Comme $v_0 = u_0 - \frac{4}{7} = \frac{1}{4} - \frac{4}{7} = \frac{-9}{28}$, on en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{-9}{28} \times 0,3^n$.
4. Ainsi, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{4}{7} + \frac{9}{28} \times 0,3^n$.
   $-1 < 0,3 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,3^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{7}$

C'est également l'occasion de réunir probabilités et Python !
La seule approche pratique valable dans le secondaire étant l'approche fréquentiste, il convient de modéliser parfaitement la situation. C'est en quelque sorte une relecture de l'arbre de probabilités que nous avons tracé précédemment. Sans oublier la condition initiale.
Dans le script qui suit, la fonction expe(n) renvoie 1 si n jours après le 2 janvier 2024 Xavier fait du sport et 0 sinon.
On calcule ensuite pour n donné, la fréquence (sur 100.000 tentatives) où Xavier fait du sport n jours après le 2 janvier 2024.

```
def une_expe(n) :
    from random import random
    sport = 0
    alea = random()
    if alea <= 0.25 :            #situation au 2 janvier 2024
```

```python
        sport += 1
    for i in range(1, n+1) :     #evolution n jours plus tard
        alea = random()
        if sport == 0 :
            if alea <= 0.4 :
                sport = 1
            else:
                sport = 0
        else :
            if alea <= 0.7 :
                sport = 1
            else:
                sport = 0
    return sport

#Programme principal
N = 100000                     #N le nombre d'experiences
S = 0
n = int(input("Nombre de jours apres le 2 janvier 2024 : "))
for i in range(N):
    S += une_expe(n)
print("La probabilite de faire du sport le jour",n,"est de :", S/N)
```

On trouve pour valeur approchée de la probabilité de faire du sport le 10-ème jour après le 2 janvier 2024 : 0,5711

A faire : un tableau des f_n pour n $=$ 0 ... 10

La suite que nous avons rencontrée dans l'exercice précédent fait partie d'une famille de suites récurrentes très connue :

3.2 Cas général

Définition 3-2-1 : On appelle **suite arithmético-géométrique** toute suite $\mathbf{u}$ définie par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = au_n + b, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \; n \in \mathbb{N}$$

Remarque 3-2-2 : Soit $\mathbf{u}$ une suite arithmético-géométrique définie comme précédemment.

1. Si $b = 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = au_n$ et on reconnait une suite géométrique de raison a.
2. Si $a = 1$, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + b$ et on reconnait une suite arithmétique de raison b.
3. Si $a = 0$, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = b$. Ainsi, u est constante (on dit aussi stationnaire) à partir du rang 1.

Propriété 3-2-3 : Soit $\mathbf{u}$ une suite arithmético-géométrique :
u_0 donné et $u_{n+1} = au_n + b$, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ $(*)$. $a \notin \{0; 1\}$ et $b \neq 0$.

1. Si $\mathbf{u}$ est convergente, de limite ℓ, alors $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.
2. Pour tout entier naturel n : $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$ (que $\mathbf{u}$ converge ou non).
3. $\mathbf{u}$ converge si et seulement si $|a| < 1$.

Démonstration :

1. Supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$. En passant à la limite dans (*) il vient $\ell = a\ell + b$. Comme $a \neq 1$, on a directement $\ell = \dfrac{\ell}{b-a}$.
2. Posons pour tout entier naturel n : $\mathcal{P}_n \ : \ u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.
   Initialisation : $\ell + (u_0 - \ell)a^0 = \ell + (u_0 - \ell) = u_0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque tel que $\mathcal{P}_n$ soit vraie : $u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.
   $u_{n+1} = au_n + b = a(\ell + (u_0 - \ell)a^n) + b = (u_0 - \ell)a^{n+1} + a\ell + b$. Or $\ell = a\ell + b$, donc $u_{n+1} = \ell + (u_0 - \ell)a^{n+1}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N} \ : \ u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$.
3. ($\Leftarrow$) Supposons que $|a| < 1$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
   ($\Rightarrow$) Remarquons que si $u_0 = \ell = \dfrac{b}{1-a}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ell$. Supposons donc $u_0 \neq \ell$ et que (u_n) converge. Comme $a^n = \dfrac{u_n - \ell}{u_0 - \ell}$, alors (a^n) converge. Ce qui est le cas si $|a| < 1$ ou $a = 1$ (exclus par hypothèse).

Exemple 3-2-4 : Soient **u** et **v** les suites définies pour tout entier naturel n par :

1. $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = 4u_n - 3$
2. $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = \dfrac{2}{5}v_n + 4$

Déterminer les limites de u_n et v_n quand n tend vers $+\infty$.

Solution : On se base sur la propriété 3-2-3.

1. $\ell = \dfrac{3}{4}$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{4} \times 4^n$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $\ell = -10$ donc pour tout entier naturel n, $v_n = -10 + 12 \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -10$.

Remarque 3-2-5 : Le résultat donnant la forme explicite d'une suite arithmético-géométrique u n'est pas au programme de Maths spécialité, mais fait souvent l'objet d'exercices de bac ; aussi la démarche employée rejoint notre premier exemple probabiliste :

— On résout l'équation $x = ax + b$ et on note ℓ sa solution.
— On pose $v_n = u_n - \ell$ et on prouve que v est une suite géométrique de raison a.
— On en déduit v_n puis u_n en fonction de n.

On peut aussi poser $w_n = a^{-n}u_n$, et prouver que $w_{n+1} - w_n = ba^{-n}$. On en déduit w_n puis u_n.

Exemple 3-2-6 : Une suite cachée !

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{1 + \dfrac{u_n^2}{2}}$.
Déterminer u_n en fonction de n, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Solution : Remarquons pour commencer que la suite u est parfaitement définie : pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$ (récurrence immédiate).
Ensuite, l'idée est d'élever au carré chacune des expressions (sous la condition $a, b \geq 0$, on a $a = b \iff a^2 = b^2$), ce qui nous donne : $u_{n+1}^2 = 1 + \dfrac{u_n^2}{2}$. Nous ne sommes pas très loin de l'expression d'une suite arithmético-géométrique. Il nous suffit maintenant de poser pour tout entier naturel n : $v_n = u_n^2$. Du coup, nous obtenons $v_0 = 9$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 1$. Bingo !

On résout l'équation $\ell = \dfrac{1}{2}\ell + 1$, ce qui nous donne $\ell = 2$, d'où pour tout entier naturel n : $v_n = 2 + (9-2) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ *i.e* $v_n = 2 + 7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On en déduit finalement que pour tout entier naturel n : $u_n = \sqrt{2 + 7 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n}$.

Vous pouvez faire ici l'exercice 5.

4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (Maths expertes)

4.1 Thème d'étude : la suite de Fibonacci

Définition 4-1-1 : On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Ainsi, les premiers termes de la suite de Fibonacci sont : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Propriété 4-1-2 :

1. Pour tout entier naturel $n \geq 2$, $F_n \geq 1$.
2. La suite $(F_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.

Démonstration : Posons $\mathcal{P}_n$: $1 \leq F_n < F_{n+1}$.
Initialisation : $F_2 = F_0 + F_1 = 1$, $F_3 = F_1 + F_2 = 3$, donc $1 \leq F_2 < F_3$. Ainsi, $\mathcal{P}_2$ est vraie.
Hérédité : Fixons un entier naturel $n \geq 2$ quelconque et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \underset{\mathcal{P}_n}{\geq} 1 + F_{n+1} > F_{n+1} \underset{\mathcal{P}_n}{\geq} F_n \geq 1$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Exercice fondamental 4-1-3 : Cet exercice sera revu dans la partie du site consacrée à l'enseignement supérieur et approfondi selon un nouvel angle : celui de l'*algèbre linéaire.*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On suppose que le trinôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines réelles et distinctes r et r'. On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. A quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle élément de E
2. Trouver quatre réels r, r', λ, λ' pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_n = \lambda r^n + \lambda' r'^n$.
   En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.

Solution : Notons $\mathbf{u} = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Commençons par remarquer que 0 n'est pas racine de $X^2 - aX - b$, sinon on aurait $b = 0$, ce qui est exclus par hypothèse.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \in E &\iff (\forall n \in \mathbb{N})\ x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n \\ &\iff x^2 = ax + b \text{ (car } x \neq 0) \\ &\iff x \text{ racine de } X^2 - aX - b \\ &\iff x = r \text{ ou } x = r' \text{ (par hypothèse)}\end{aligned}$$

2. Cette question demande plus d'attention. Commençons par quelques remarques :
   — D'après la question 1, on sait que $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r'^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à E. On prouve facilement que toute combinaison linéaire de ces deux suites est aussi un élément de E *i.e* pour tous réels λ et λ', $(\lambda r^n + \lambda' r'^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E.
   — Une suite $\mathbf{u}$ appartenant à E est entièrement déterminée par la connaissance de ses deux premiers termes u_0 et u_1.

   Nous allons à présent raisonner par **analyse-synthèse**.

   Analyse : Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Supposons qu'il existe des réels λ, λ' tels que pour tout entier naturel n, $u_n = \lambda r^n + \lambda' r'^n$. Mais alors (en remplaçant n par 0 puis par 1), on obtient le système : $\begin{cases}\lambda + \lambda' = u_0 \\ \lambda r + \lambda' r' = u_1\end{cases}$ qui a pour solution $\begin{cases}\lambda = \dfrac{r'u_0 - u_1}{r' - r} \\ \lambda' = \dfrac{u_1 - ru_0}{r' - r}\end{cases}$

   Donc si le couple (λ, λ') existe, il est unique et donné par la formule précédente.

   Synthèse : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{r'u_0 - u_1}{r' - r} r^n + \dfrac{u_1 - ru_0}{r' - r} r'^n$.
   En vertu de notre remarque préliminaire, on sait que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ et un calcul simple nous apprend que $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$. Toujours en vertu de notre remarque préliminaire, on en déduit que pour tout entier naturel n, $v_n = u_n$.

   On applique le résultat précédent à $\mathbf{u} = \mathbf{F}$.
   Pour tout entier naturel n, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \iff F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$.
   Ce qui nous amène à étudier le polynôme $X^2 - X - 1$. Ce dernier possède deux racines réelles distinctes : $r = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r' = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, par ce qui précède : pour tout entier naturel n, $F_n = \dfrac{r'F_0 - F_1}{r' - r} r^n + \dfrac{F_1 - rF_0}{r' - r} r'^n$.
   On trouve que $\dfrac{r'F_0 - F_1}{r' - r} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et que $\dfrac{F_1 - rF_0}{r' - r} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, d'où :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

   $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0$
   et $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = +\infty$.
   On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty}$$

La suite de Fibonacci possède de nombreuses propriétés que nous étudierons plus tard. Ce qu'il faut retenir pour le moment, c'est la forme de sa récurrence : $\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma = 0$;

on parle de récurrence linéaire d'ordre 2, et l'idée de lui associer un trinôme : $\alpha X^2 + \beta X + \gamma$ dont les racines vont nous permettre de trouver effectivement les suites vérifiant l'équation de récurrence.

4.2 Cas général

Définition 4-2-1 :

1. On appelle **suite récurrente linéaire d'ordre 2** toute suite récurrente de la forme $\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma = 0$, où $\alpha \neq 0$. On peut donc la réécrire sous la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ou encore $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$.
2. On appelle **équation caractéristique** de l'équation linéaire d'ordre 2 : $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$, l'équation du second degré $X^2 - aX - b = 0$.

Théorème 4-2-2 : Soit $(E)\ :\ u_{n+2} + bu_{n+1} + c = 0$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $(Ec)\ :\ x^2 + ax + b = 0$.

1. Si (Ec) possède deux solutions réelles distinctes r et r', alors les solutions de (E) sont les suites réelles de terme général $u_n = Ar^n + Br'^n,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$.
2. Si (Ec) possède une unique solution réelle r_0, alors les solutions de (E) sont les suites réelles de terme général $u_n = (An + B)r_0^n,\ (A,B) \in \mathbb{R}^2$.
3. Si (Ec) possède deux solutions complexes conjuguées $z_1 = re^{\mathbf{i}\theta}$ et $z_2 = re^{-\mathbf{i}\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors les solutions de (E) sont les suites réelles de terme général $u_n = (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))r^n$.

Le 1. a été démontré. Le 2. et le 3. seront démontrés à l'exercice 7.

5 Exercices

Exercice 1 : Considérons la suite $\mathbf{u}$ définie par $u_0 \in D_f = [-3/2; +\infty[$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = x$.

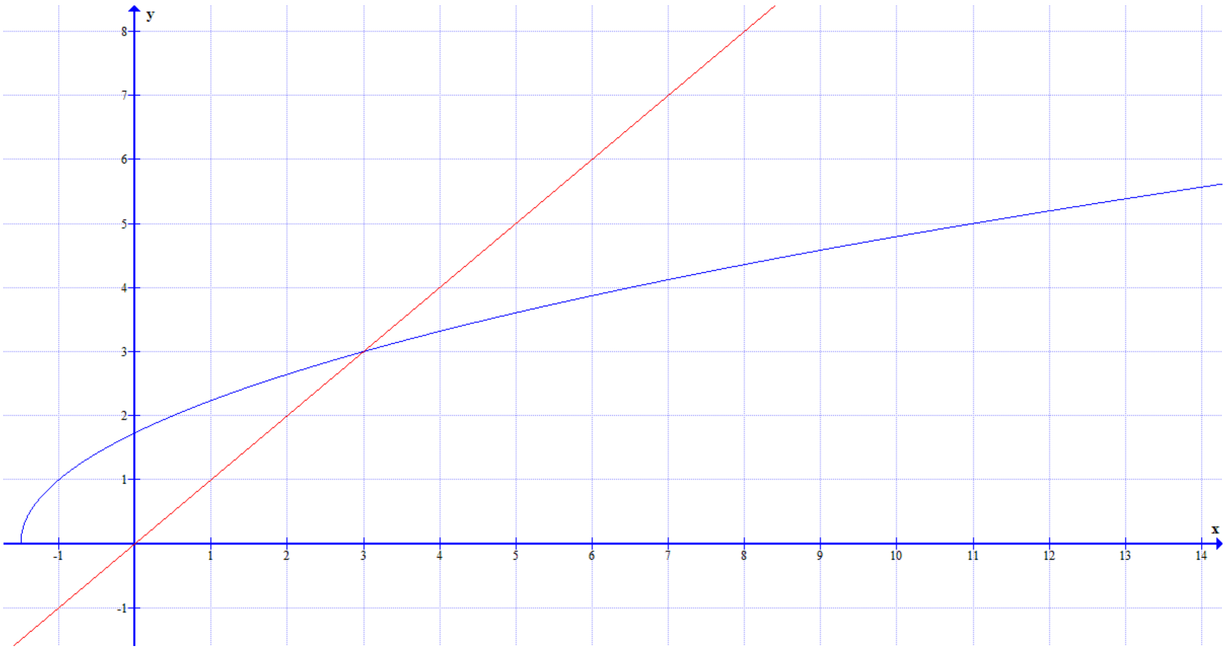

FIGURE 7 – $u_0 \geq -3/2$ et $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$

1. Résoudre sur D_f l'équation $f(x) = x$. Quel est l'intérêt de ceci ?
2. Étudier graphiquement selon les différentes valeurs de $u_0 \in D_f$ la limite éventuelle de la suite $\mathbf{u}$.
3. **Méthode 1** :
   (a) Étudier les variations de la fonction f.
   (b) Justifier que les intervalles $I_1 = [-3/2; 3]$ et $I_2 =]3; +\infty[$ sont stables par f. En déduire que la suite $\mathbf{u}$ est parfaitement définie et que si $u_0 \in I_1$ (resp. I_2), alors pour tout entier naturel n : $u_n \in I_1$ (resp. I_2).
   (c) Prouver que si $u_0 \in I_1$, alors pour tout entier naturel n : $-3/2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. En déduire que la suite $\mathbf{u}$ converge et préciser sa limite.
   (d) Prouver que si $u_0 \in I_2$, alors pour tout entier naturel n : $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$. En déduire que la suite $\mathbf{u}$ converge et préciser sa limite.
4. **Méthode 2** :
   (a) Choisissons $u_0 > 3$. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n > 3$.
   (b) Prouver que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{2u_n - 6}{\sqrt{2u_n + 3} + 3}$. En déduire que $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{2}{3}(u_n - 3)$
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n (u_0 - 3)$. Quelle est la limite de la suite $\mathbf{u}$?
   (d) Adapter la preuve au cas où $u_0 \in [0; 3]$.

Exercice 2 : On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une des suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

1. Partie 1

   On supposera ici que $\mathbf{u}$ est croissante et $\mathbf{v}$ décroissante.

   (a) Justifier que la suite $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ est croissante.

   (b) Prouver par l'absurde que pour tout entier naturel n : $u_n \leq v_n$.

   (c) Prouver que la suite $\mathbf{u}$ est majorée. En déduire qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ_u. Justifier de même que la suite $\mathbf{v}$ converge vers une limite que l'on notera ℓ_v.

   (d) Prouver enfin que $\ell_u = \ell_v$.

2. Partie 2

   Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{2}{2u_n + 1}$.

   On donne ci-dessous la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = x$.

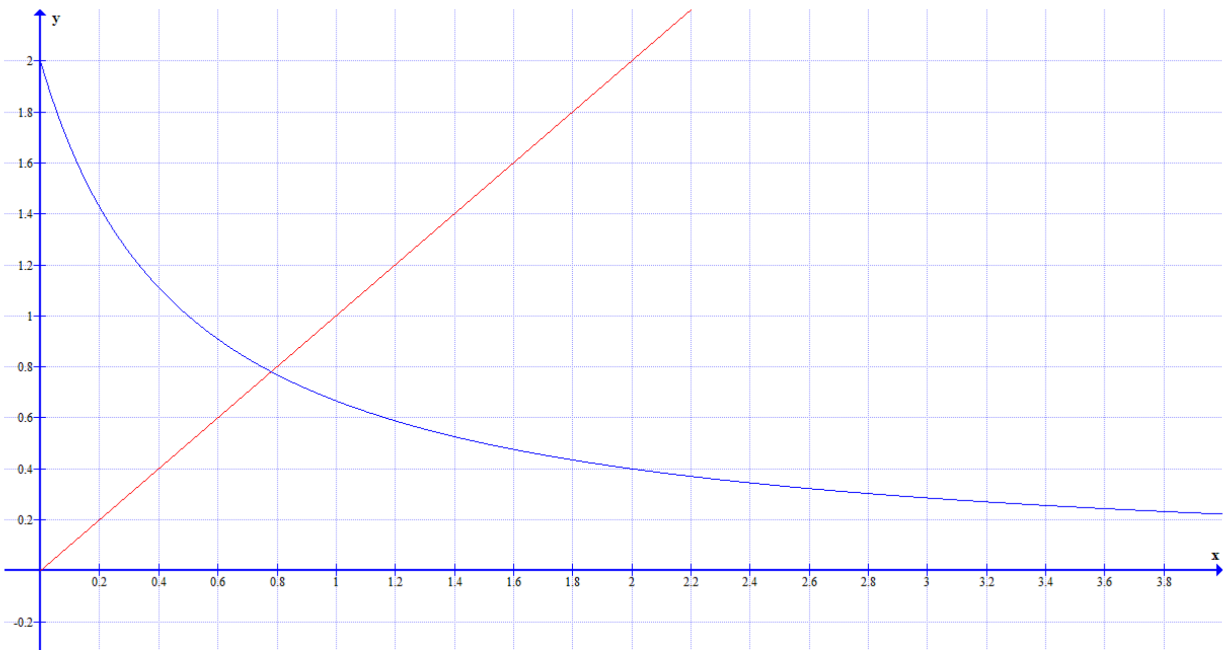

FIGURE 8 – $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2}{2u_n + 1}$

   (a) Représenter les 5 premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses. Semble-t-elle monotone (croissante ou décroissante) ?

   (b) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{2x + 1}$.

   (c) Justifier brièvement que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie.

   (d) Prouver que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$ et préciser la valeur exacte de α.

   (e) Prouver que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et majorée par α puis décroissante et minorée par α. Que dire sur leur convergence ?

   (f) Prouver que pour tout entier naturel n : $u_{2n+1} - u_{2n} = \dfrac{4(u_{2n-1} - u_{2n})}{(2u_{2n} + 1)(2u_{2n-1} + 1)}$ puis que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $0 \leq u_{2n+1} - u_{2n} \leq \dfrac{40}{9(\sqrt{17} + 1)}(u_{2n-1} - u_{2n-2})$.

(g) On pose pour tout $n \geq 1$: $v_n = u_{2n+1} - u_{2n}$ et $k = \dfrac{40}{9(\sqrt{17}+1)}$. Prouver que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq v_n \leq k^{n-1} v_1$ et en déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

(h) Conclure.

Exercice 3 : Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = e^{-u_n}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = x$.

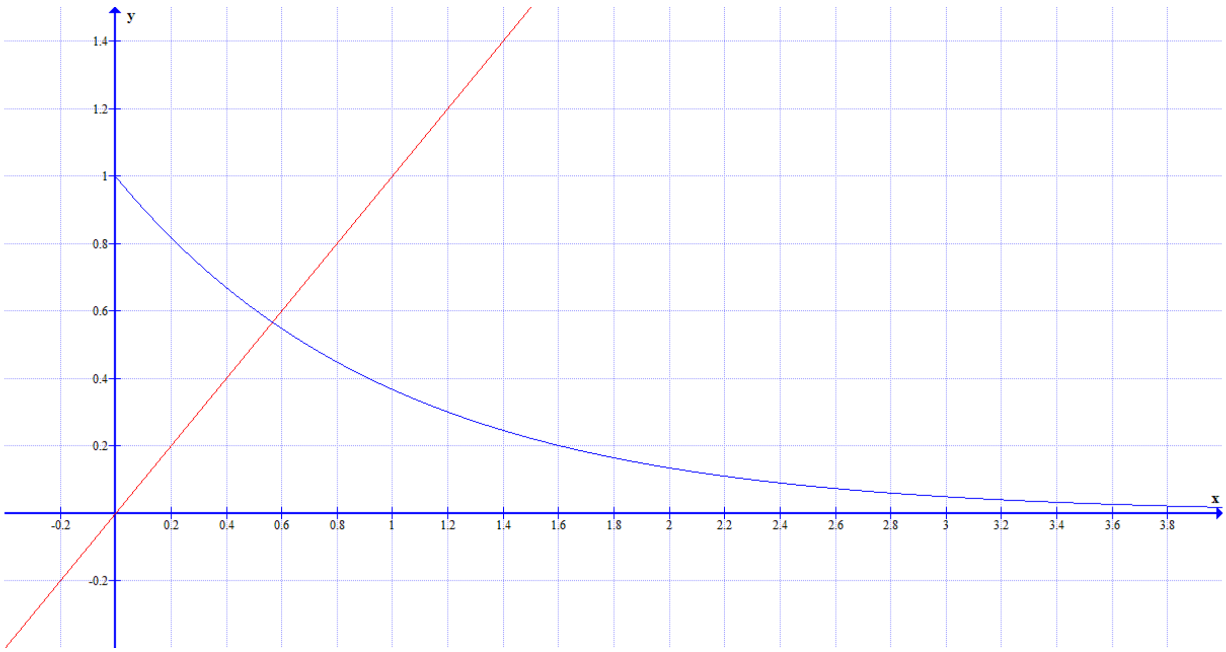

FIGURE 9 – $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{-u_n}$

1. Représenter les 5 premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses. Semble-t-elle monotone (croissante ou décroissante) ?
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}$.
3. Justifier brièvement que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie et que tous ses termes u_n appartiennent à $[0; 1]$.
4. Prouver que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Quel sens peut-on donner à α ?
5. Prouver que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et majorée par α puis décroissante et minorée par α. En déduire qu'elles sont convergentes.
6. Il semble délicat de démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$, ce qui prouverait que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergentes de même limite. Ainsi, la suite $\mathbf{u}$ convergerait vers cette limite commune ℓ. Pouvez-vous donner la valeur de ℓ ?
7. On note $h = f \circ f \colon \mathbb{R}^+ \to [0; 1]$.
   (a) Prouver que tout point fixe de f *i.e* toute valeur $x_0 \in D_f$ telle que $f(x_0) = x_0$, est aussi un point fixe de h.
   (b) Justifier que l'équation $h(x) = x$ a une unique solution $\beta \in \mathbb{R}^+$. Comparer β à α.
   (c) En remarquant que $u_{2n} = h(u_{2n-2})$ et que $u_{2n+1} = h(u_{2n-1})$, justifier que la suite $\mathbf{u}$ converge vers α.

Exercice 4 : Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 - 2u_n + 3$.

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ et justifier que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie et que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq 3$.
2. Représenter les cinq premiers termes de $\mathbf{u}$ sur le graphique ci-dessous.

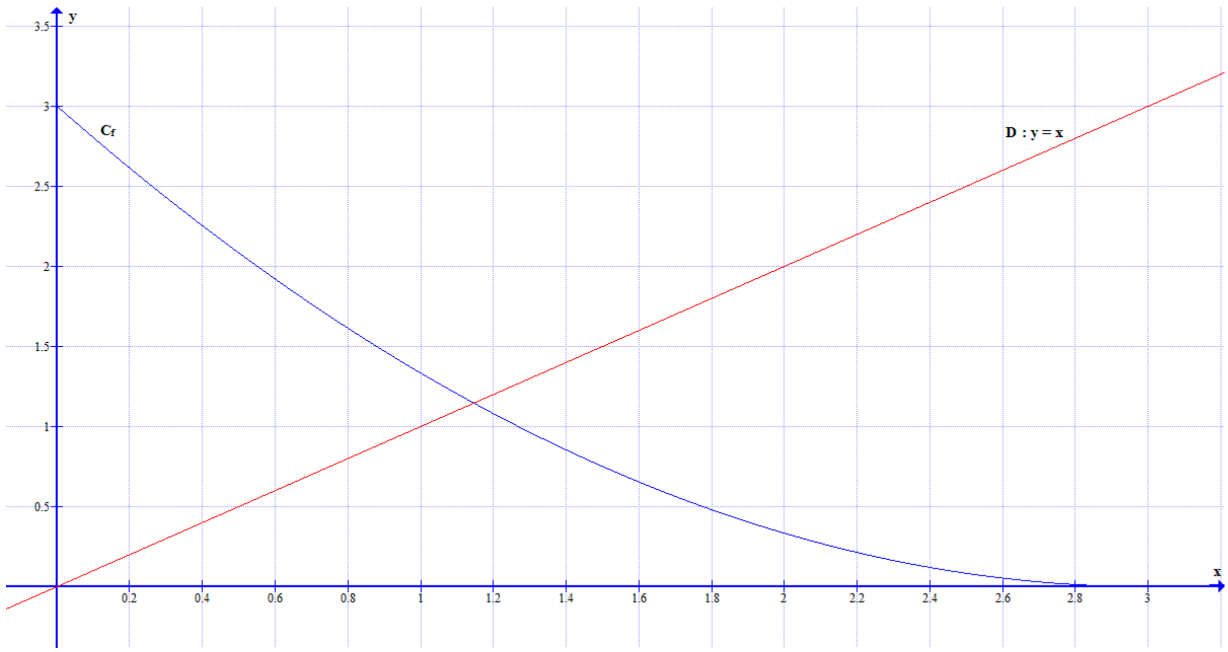

FIGURE 10 – $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n^2 - 2u_n + 3$

3. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = x$ sur $I = [0; 3]$. Quel sens peut-on donner à α ?
4. L'inspection graphique de la question 2 laisse penser que la suite $\mathbf{u}$ est divergente. Nous allons pour cela prouver que les suites définies pour tout entier naturel n par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ ont des limites distinctes.
   (a) Prouver que pour tout entier naturel n : $2 \leq v_n \leq v_{n+1} \leq 3$ et que $0 \leq w_{n+1} \leq w_n \leq \dfrac{1}{3}$.
   (b) Justifier que les suites $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ convergent. On notera ℓ et ℓ' leurs limites respectives.
   (c) Justifier que $\ell \neq \ell'$ et conclure.

Exercice 5 : Déterminer la limite des suites définies par récurrence par :

1. $u_{n+1} = -0,9u_n + 3$
2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n - \dfrac{2}{3}$
3. $u_{n+1} = -0,2u_n - 1$
4. $u_{n+1} = 1,5u_n - 4$
5. $u_{n+1} = -2u_n + 5$

Exercice 6 : On définit la suite de Fibonacci (F_n) par $\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

1. a) Calculer les six premiers termes de la suite (F_n).
   b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel k, le nombre F_{3k} est pair et les nombres F_{3k+1} et F_{3k+2} sont impairs.
2. Formulation de la suite (F_n).

   a) On note (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = a \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

   b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et que $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Dans toute la suite de l'exercice, on note $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

   Prouver que $\phi + \phi' = 1$, $\phi' = \dfrac{1}{\phi}$ et que lorsque $a = \phi$ ou $a = \phi'$, la suite (u_n) est une suite géométrique.
3. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$,
   a) Démontrer que la famille $\{(\phi, 1); (\phi', 1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ i.e pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique couple de réels (λ, μ) tel que $(a, b) = \lambda(\phi, 1) + \mu(\phi', 1)$.
   b) Déterminer les coordonnées du vecteur (1,0) dans cette base.
   c) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \phi'^n)$.
   d) Démontrer que pour tout entier naturel n, $-1 < \dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}} < 1$. En déduire que que le nombre F_n est à l'unité près, égal à $\dfrac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.
4. Formulation matricielle de la suite (F_n).

   Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$.

   a) Justifier que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$, où A désigne la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $A^n = A^n U_0$.
   c) Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$.
   d) On pose $B = A^3 - Id$. Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis démontrer que la matrice B est inversible et calculer B^{-1}.
   e) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} A^{3k} = A^3 + A^6 + \cdots + A^{3n}$. Démontrer que $S_n = (A^{3(n+1)} - A^3)B^{-1}$.
5. Le but de cette question est de fournir une preuve au projet n°2 d'Euler : *En ne considérant que les termes de la suite de Fibonacci dont la valeur est paire et ne dépasse pas 4 millions, trouvez la somme de ces termes.*
   a) Déterminer le plus grand entier naturel n tel que $F_n \leq 4000000$ (penser à utiliser la question 2)d)).

b) Justifier que la somme des termes de la suite de Fibonacci dont la valeur est paire et dont le rang est inférieur ou égal à $3n$ est un des coefficients de la matrice S_n. Lequel est-ce ?

c) En déduire la réponse au problème 2 du projet d'Euler.

PROJECT EULER : `https://projecteuler.net`

Exercice 7 : Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie pour tout entier naturel n : $(E)\ :\ u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.
Son équation caractéristique est $(E_c)\ :\ x^2 + ax + b = 0$.

1. On suppose dans cette question que l'équation caractéristique (E_c) possède une unique solution réelle r_0.
   a) Justifier que les suites de terme général $u_n = r_0^n$ et $v_n = nr_0^n$ sont solutions de (E).
   b) En déduire que les suites de terme général $w_n = Au_n + Bv_n$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont aussi solutions de (E).
   c) Réciproquement, soit (w_n) une suite solution de (E). Prouver qu'il existe un unique couple (A, B) de réels tel que $w_n = Au_n + Bv_n$ et conclure.
2. On suppose dans cette question que l'équation caractéristique (E_c) possède deux solutions complexes conjuguées $z_1 = re^{\mathbf{i}\theta}$ et $z_2 = re^{-\mathbf{i}\theta}$.
   a) Justifier que les suites de terme général $u_n = \cos(n\theta)r^n$ et $v_n = \sin(n\theta)r^n$ sont solutions de (E).
   b) En déduire que les suites de terme général $w_n = Au_n + Bv_n$, où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ sont aussi solutions de (E).
   c) Réciproquement, soit (w_n) une suite solution de (E). Prouver qu'il existe un unique couple (A, B) de réels tel que $w_n = Au_n + Bv_n$ et conclure.

Exercice 8 : D'après concours général 2021.
Dans tout cet exercice, on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier naturel $n \geq 0$.
Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

1. Démontrer que toute suite appartenant à $\mathcal{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.
2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geq 2$ pour lequel $u_N \leq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.
3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Dans la suite, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$

4 Démontrer que $0 \in E_0$.

5 a) Démontrer que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que si $x \in E_0$, alors l'intervalle $]-\infty; x]$ est inclus dans E_0.

6 a) Démontrer que la fonction $x \mapsto e^x - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geq 1$ tel que $u_N \geq N+1$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

c) Démontrer que $1 \in E_\infty$.

7 Démontrer que si $x \in E_\infty$, alors l'intervalle $[x; +\infty[$ est inclus dans E_∞.

Nous allons maintenant prouver qu'il existe un réel δ tel que l'intervalle $]-\infty; \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta; +\infty[$ est inclus dans E_∞.

8 On définit deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante. On pose $a_0 = 1$, $b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, on pose :

$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $\dfrac{a_n + b_n}{2} \in E_0$ et

$a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ sinon.

a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont même limite.

b) Appelons δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$. Démontrer que $]-\infty; \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta; +\infty[$ est inclus dans E_∞.

Il ne nous reste donc plus qu'à prouver que $\delta \in E_\infty$.

9 On pose $c_2 = \ln(\ln(2))$, $c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geq 2$: $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\ldots\ln((\ell-1)\ln(\ell))\ldots))))$.
Démontrer que pour tout entier $\ell \geq 2$, $c_\ell \in E_0$.

10 Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geq 2}$ converge.

11 Démontrer enfin que $\delta \in E_\infty$.