Géométrie dans l'espace : épisode 1

Un soupçon de géométrie pure !

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

October 28, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Sommaire

Remarques préliminaires

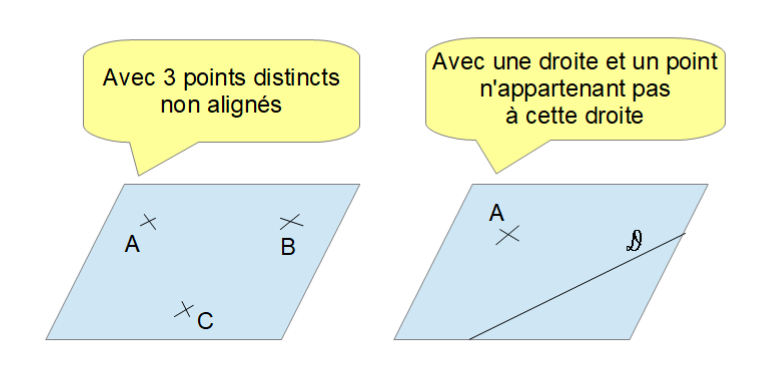
Ce qu'il faut retenir de la géométrie plane

TOUT ! Même si nous allons travailler dans l'espace en trois dimensions, il nous arrivera souvent de nous restreindre à un plan.

Ainsi, tous les théorèmes vus en deux dimensions resteront vrais : Pythagore, Thalès, etc.

Droites et plan de l'espace

1. Tout comme dans le plan :
   Par deux points distincts de l'espace passe une unique droite.
2. Nous pouvons définir un plan de l'espace :



Définir une droite ou un plan de l'espace

Vocabulaire

1. Des points appartenant à un même plan sont dits **coplanaires**.
2. Des droites appartenant à un même plan sont dites **coplanaires**.

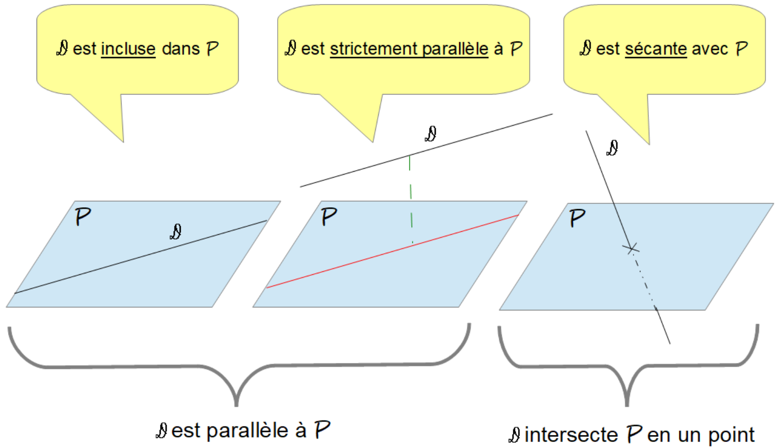
Propriété 1 : Si un plan $\mathcal{P}$ contient deux points distincts A et B, alors il contient la droite (AB).

Mise en garde

1. Deux points A et B distincts sont toujours coplanaires : ils appartiennent à tous les plans contenant la droite (AB).
2. En revanche, quatre points peuvent très bien ne pas appartenir à un même plan (pensez au tétraèdre).

Positions relatives d'une droite et d'un plan

Droites et plans dans l'espace



Positions relatives d'une droite et d'un plan

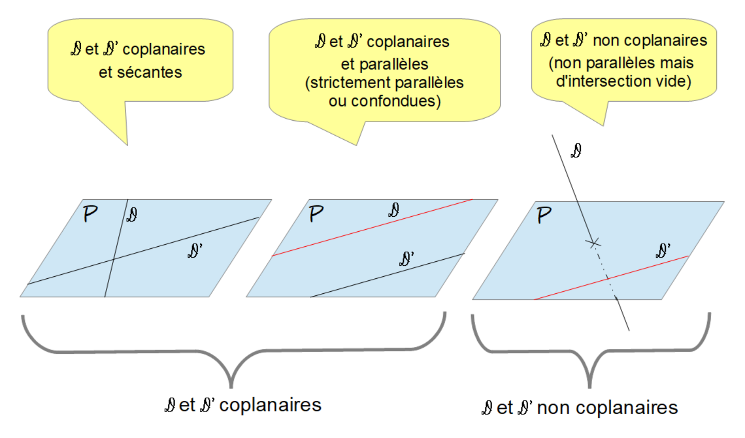
On retiendra que ...

1. Soit la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$: **il suffit pour ceci de trouver deux points distincts de $\mathcal{D}$ appartenant à $\mathcal{P}$**.
2. Soit la droite $\mathcal{D}$ n'intersecte pas le plan $\mathcal{P}$: $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$
3. Soit la droite $\mathcal{D}$ intersecte le plan $\mathcal{P}$ en un unique point : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$.

Positions relatives de deux droites

Deux droites dans l'espace

Ici intervient la première différence notable avec la géométrie plane.



Positions relatives de deux droites

Deux droites dans l'espace

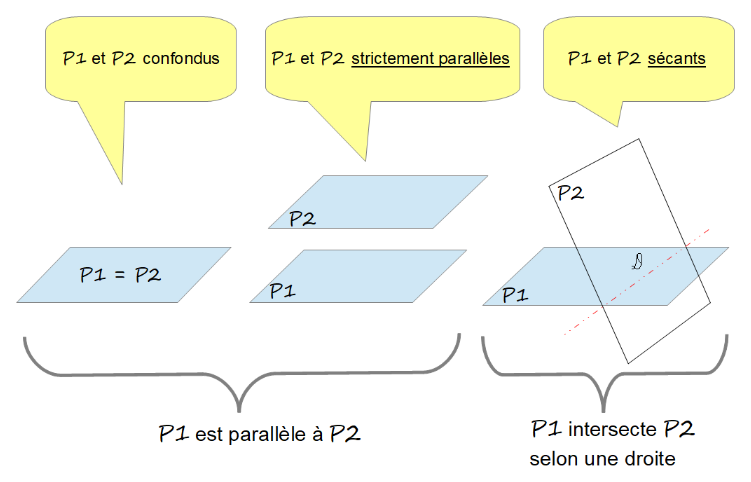
Nous retiendrons les faits suivants sur deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de l'espace :

1. Soit les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont coplanaires, auquel cas :
   - Elles peuvent être sécantes.
   - Elles peuvent être strictement parallèles.
   - Elles peuvent être confondues
2. Soit les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Deux droites de l'espace qui n'ont aucun point en commun sont donc soient deux droites coplanaires et strictement parallèles ou bien deux droites non coplanaires.

Remarque : Ainsi, se donner deux droites sécantes ou deux droites strictement parallèles permet aussi de définir l'unique plan les contenant.

Deux plans dans l'espace



Positions relatives de deux plans

Nous retiendrons que ...

Deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ peuvent être :

- confondus : $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$.
- ne pas avoir de point en commun : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$
- se couper selon une droite $\mathcal{D}$.

Point méthode 1

1. Pour déterminer la droite d'intersection de deux plans sécants $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, il suffit de trouver deux points distincts A et B qui appartiennent à chacun de ces deux plans.
2. Pour justifier que deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus, il suffit de trouver trois points distincts et non alignés qui appartiennent à chacun de ces deux plans.

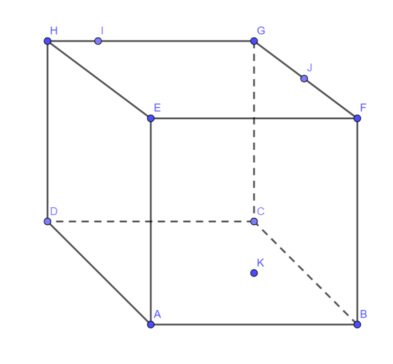
Perspective cavalière

Nous rappelons les principes de représentation d'un solide convexe 3D à faces planes en 2D à l'aide de la **perspective cavalière**.

1. Les arêtes visibles sont dessinées en traits pleins et les autres sont représentées en traits pointillés.
2. Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
3. Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes.
4. Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné, et d'une manière générale, les proportions sur un segment sont conservées, de même que les rapports de longueur sur les segments parallèles.
5. Le plan de face est représenté en vraie grandeur ou à l'échelle.

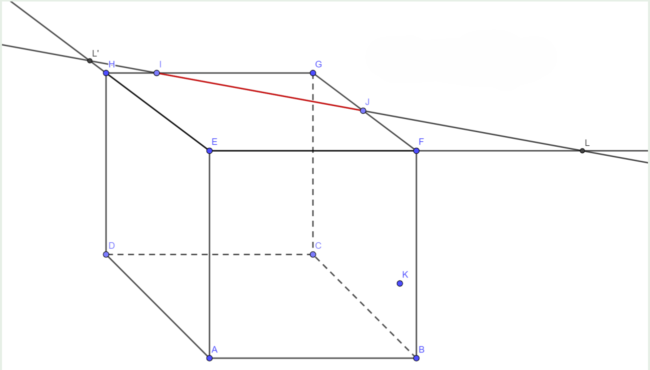
Un exemple de section

Considérons le cube ABCDEFGH. I appartient à [GH], J appartient à [FG] et K appartient à la face (ABFE). Nous cherchons à déterminer l'intersection du plan (IJK) avec chacune des faces du cube.



Un exemple de section

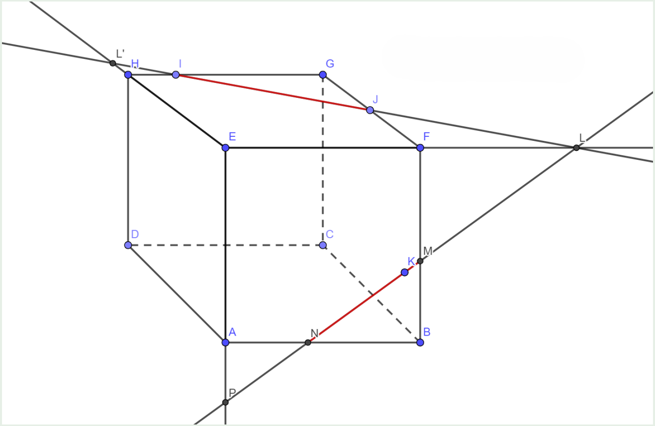
Dans le plan (EFG) les droites (IJ) et (EF) / (EH) sont sécantes. On note $L = (IJ) \cap (EF)$ et $L' = (IJ) \cap (EH)$. Nous avons d'après le point méthode 1-1 : $\underline{(IJK) \cap (EFG) = (IJ) = (LL')}$. De plus, $(IJK) = (LL'K)$.



Sections de solides

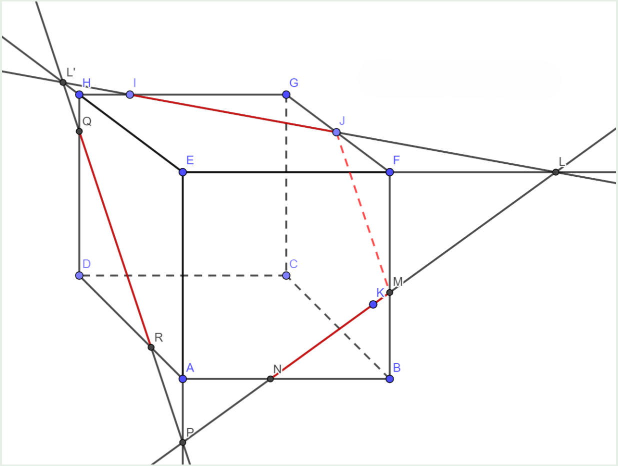
Un exemple de section

Utilisant les mêmes arguments, nous déterminons l'intersection des plans (IJK) et (ABF). Nous regardons alors la trace sur la **face** (ABFE).



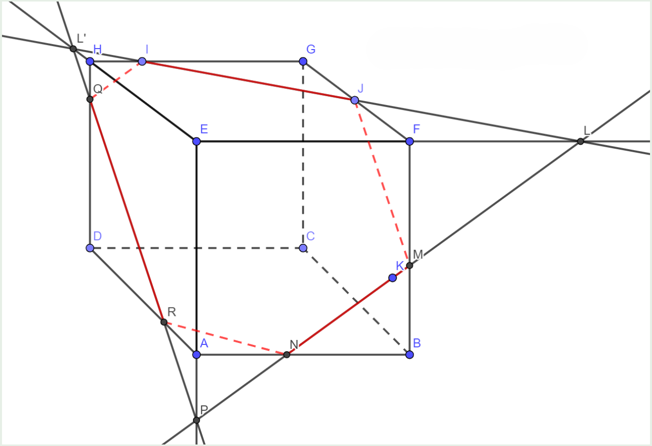
Un exemple de section

Et ainsi de suite . . .

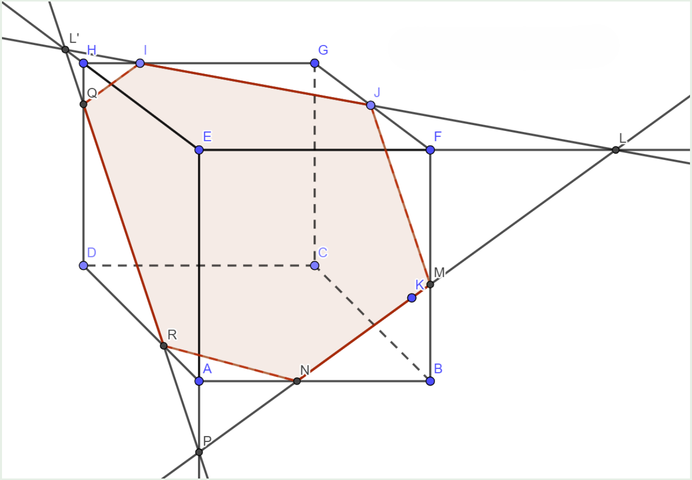


Un exemple de section

Et ainsi de suite . . .

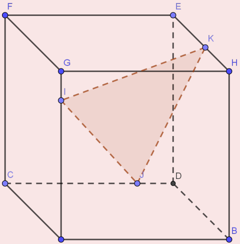


Un exemple de section



Nous retiendrons que . . . (et un p'tit défi !)

Si nous disposons de deux points appartenant à une même face du cube, les règles d'incidence de deux droites dans un plan donné, suffisent. Mais sinon, il faudra "ruser" ! Trouver un intermédiaire. Mais comment ? Quelle est la section du plan (IJK) avec le cube ?



Parallélisme

Parallélisme droite/droite et droite/plan

Propriété 2 :

1. Deux droites de l'espace $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si elles sont :
   - coplanaires,
   - et si dans ce plan elles sont parallèles (confondues ou sans point commun)
2. Deux droites parallèles à une même troisième droite sont parallèles.

Propriété 3 :

1. Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est parallèle à un plan $\mathcal{P}$ ssi $\mathcal{D}$ est parallèle à une droite de $\mathcal{P}$.
2. Si une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est parallèle à un plan $\mathcal{P}$, alors elle est parallèle à une infinité de droites de $\mathcal{P}$, mais pas à toutes !
3. Si deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles alors tout plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'une est aussi parallèle à l'autre.

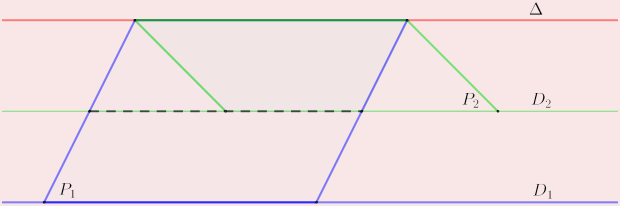
Exemples

1. VRAI OU FAUX ?
   1. Deux droites parallèles à un même plan sont parallèles.
   2. Deux plans parallèles à une même droite sont parallèles.
2. Dans le pavé ABCDEFGH, I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AE] et [AB], et K et L sont les centres respectifs des faces (BCGF) et (EFGH). Prouvez que le plan (IFH) est parallèle à la droite (JK).

Théorème du toit

Un théorème très utile pour prouver le parallélisme de plusieurs droites dans l'espace, mais aussi une excellente source de contre-exemples !

Théorème du toit : Si deux plans sécants $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ contiennent respectivement deux droites parallèles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$, alors leur droite d'intersection Δ est parallèle aux deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.



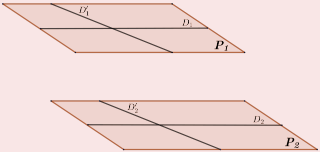
Exemples

1. ABCD est un tétraèdre ; M est un point de [BC] distinct de B et de C. Par M on trace la parallèle à (AB) qui coupe (AC) en I, et la parallèle à (CD) qui coupe (BD) en J. Le plan (MIJ) coupe (AD) en N.
   - Démontrez que (IN) est parallèle à (MJ) et à (CD).
   - Démontrez que (JN) est parallèle à (IM) et à (AB).
   - En déduire la nature du quadrilatère IMJN.
2. Soit I et J les milieux respectifs des arêtes [AC] et [AD] d'un tétraèdre ABCD, et K un point de l'arête [BC].
   Prouvez que les plans (IJK) et (BCD) sont sécants suivant la parallèle à (IJ) passant par K.

Prouver que des plans sont parallèles

Propriété 4 (parallélisme de trois plans) : Deux plans parallèles à un même troisième plan sont parallèles.

Théorème (parallélisme de deux plans) : Si deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}'_1$ d'un plan $\mathcal{P}_1$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}'_2$ d'un plan $\mathcal{P}_2$, alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

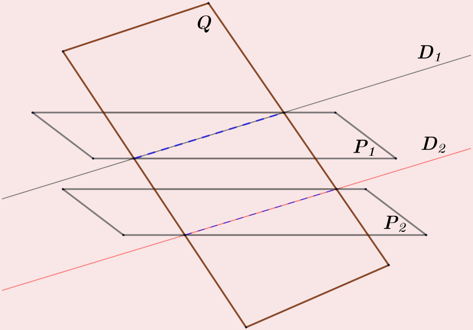


Exemples

1. VRAI OU FAUX ?
   1. Si deux droites parallèles $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_1'$ d'un plan $\mathcal{P}_1$ sont respectivement parallèles à deux droites parallèles $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_2'$ d'un plan $\mathcal{P}_2$, alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.
   2. Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, alors chaque droite de $\mathcal{P}_1$ est parallèle à chaque droite de $\mathcal{P}_2$.
   3. Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, alors toute droite parallèle à $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$.
2. Soit un pavé ABCDEFGH : prouvez que les plans (AFH) et (BDG) sont parallèles.

Plans parallèles et droites parallèles

Théorème (intersection de deux plans parallèles) : Si deux plans sont parallèles, alors tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



Parallélisme

Le théorème précédent est également très utile pour construire des sections de faces planes. Allez, un dernier petit quiz pour la route !

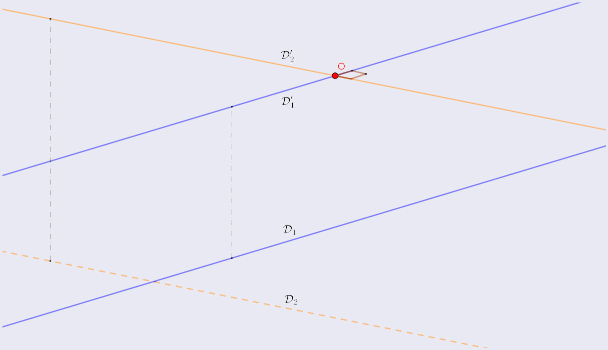
VRAI OU FAUX ?

1. Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ parallèles à un plan $\mathcal{P}$ déterminent un plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$.
2. Deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qui coupent un plan $\mathcal{P}$ déterminent un plan sécant à $\mathcal{P}$.
3. Deux droites strictement parallèles et parallèles à un plan $\mathcal{P}$ déterminent un plan $\mathcal{Q}$ parallèle à $\mathcal{P}$.

Orthogonalité

Orthogonalité de deux droites de l'espace

Définition : On dit que les deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **orthogonales** si pour tout point O de l'espace, les parallèles $\mathcal{D}'_1$ et $\mathcal{D}'_2$ à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par O sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent. On note $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$.



Propriétés immédiates

1. Deux droites de l'espace $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **orthogonales** si il existe un point O de l'espace tel que les parallèles $\mathcal{D}_1'$ et $\mathcal{D}_2'$ à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ passant par O sont perpendiculaires dans le plan qu'elles déterminent.
2. Si deux droites sont orthogonales, alors toute droite parallèle à l'une est orthogonale à toute droite parallèle à l'autre.
3. Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

VRAI OU FAUX ?

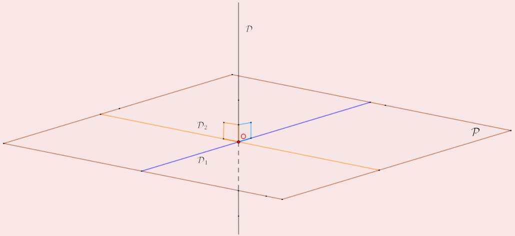
Si deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales à une même droite Δ, alors elles sont parallèles.

Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition : On dit que la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si elle est orthogonale à toutes les droites de $\mathcal{P}$.

Théorème de la porte

Théorème : Une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{D}$ est orthogonale à **deux droites sécantes** de $\mathcal{P}$.



VRAI OU FAUX ?

1. Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à une droite d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.
2. Si une droite $\mathcal{D}$ est orthogonale à deux droites parallèles d'un plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{P}$.

Exemple

Dans le pavé ABCDEFGH , les points J et K sont respectivement sur les arêtes [BF] et [CG] tels que BJ $=$ CK.
I est le pied de la hauteur du triangle AEJ issue de E.

Démontrez que la droite (EI) est orthogonale au plan (AJK).

Orthogonalité

Projeté orthogonal

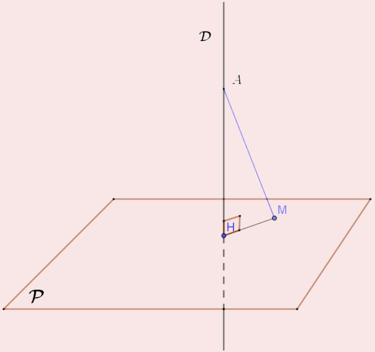
1. Par un point A donné, on peut mener un plan $\mathcal{P}$ et un seul orthogonal à une droite donnée $\mathcal{D}$.
2. Par un point A donné, on peut mener une droite $\mathcal{D}$ et une seule orthogonale à un plan donné $\mathcal{P}$. Le point d'intersection H de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ s'appelle le **projeté orthogonal** de A sur $\mathcal{P}$.

Théorèmes d'orthogonalité / parallélisme

1. Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
2. Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.
3. Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
4. Si deux plans sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Remarque

Le projeté orthogonal H d'un point A sur le plan $\mathcal{P}$ est l'unique point de $\mathcal{P}$ réalisant le minimum des distances AM, quand M parcourt $\mathcal{P}$.



Exemple

On considère un pavé ABCDEFGH. On note I le point d'intersection de la droite perpendiculaire à (BD) passant par A avec la droite (CD) et J le point d'intersection de la droite perpendiculaire à (BD) passant par C avec la droite (AB).

Démontrez que les plans (CGJ) et (AEI) sont parallèles.

Plan médiateur

Théorème et définition : Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points équidistants de A et B est le plan orthogonal à la droite (AB) qui passe par le milieu de [AB].
Ce plan est appelé le **plan médiateur** du segment [AB].