Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Niveau : Term spé maths + Année : 2024-2025

Rappels de cours : Limite d'une suite.

Dans tout ce qui suit, **u** ou (u_n) ou encore $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite à termes réels et ℓ un réel.

Définitions :

1. On dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou encore que u_n tend vers $+\infty$) si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n > A$.
   Formellement : $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies u_n > A$.
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. On dit que (u_n) a pour limite $-\infty$ (ou encore que u_n tend vers $-\infty$) si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n < -A$.
   Formellement : $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies u_n < -A$.
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

3. On dit que (u_n) a pour limite ℓ (ou encore que u_n tend vers ℓ) si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.
   Formellement : $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon$.
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

   Remarque : $|u_n - \ell| < \epsilon \iff u_n \in]\ell - \epsilon ; \ell + \epsilon[$.

Remarque : nous pouvons remplacer des inégalités strictes par des inégalités larges dans les définitions précédentes.

ATTENTION, Toutes les suites n'ont pas de limite. Par exemple les suites de terme général $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-2)^n$, $w_n = \sin n$, $t_n = \cos n$.

Théorème-définition : Si une suite (u_n) possède une limite, alors celle-ci est unique. On peut alors parler de **LA** limite de la suite (u_n). On dit que la suite (u_n) est **convergente** si elle possède une limite finie. Sinon, on dit que (u_n) est **divergente**.

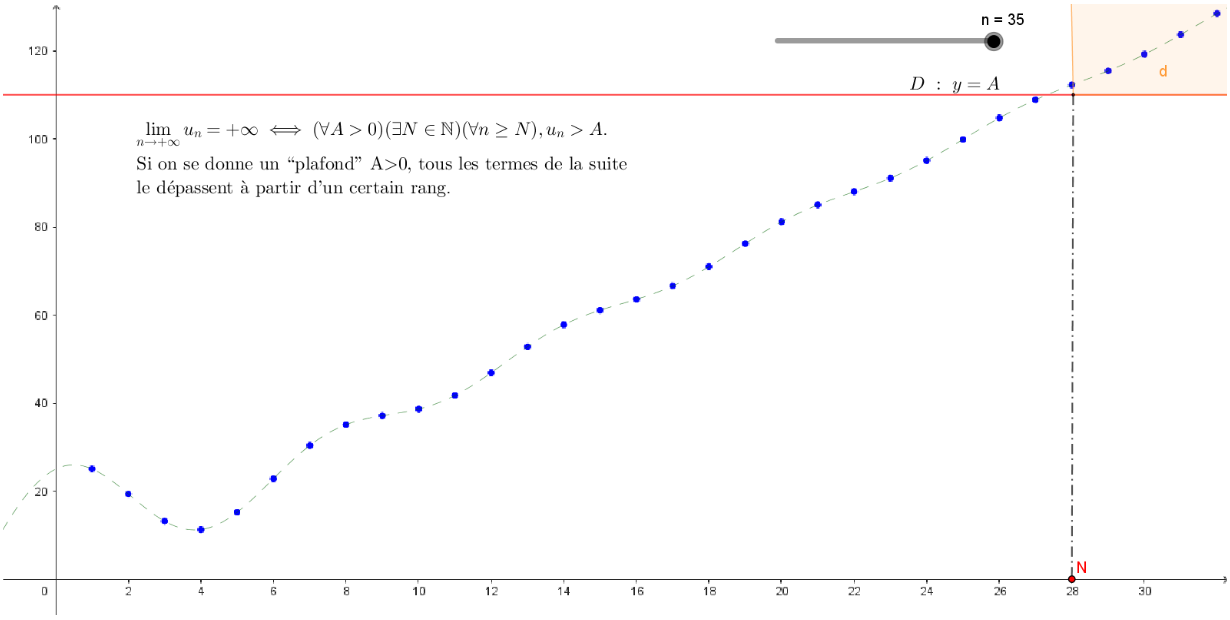


Figure 1: limite infinie

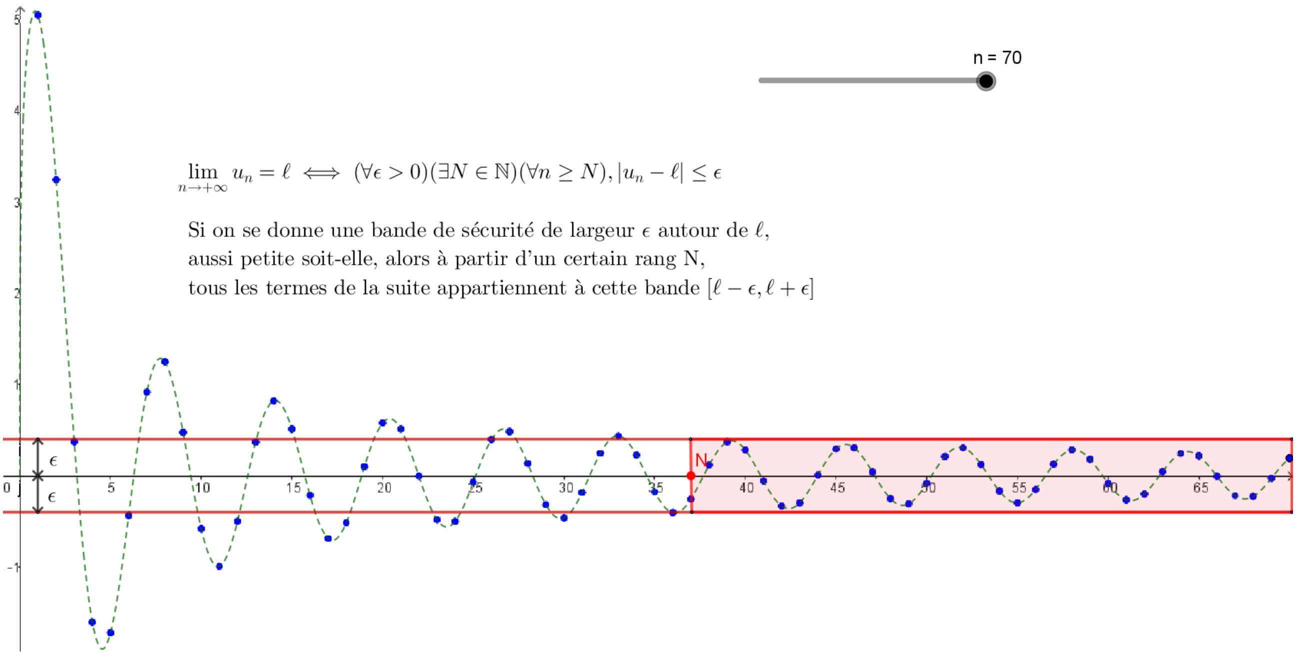


Figure 2: limite finie

Exercice n°1

1. **En revenant à la définition de la limite**, prouvez que :

   - Si une suite admet une limite finie ℓ, alors celle-ci est unique.
   - Si une suite admet une limite finie $\ell > 0$, alors à partir d'un certain rang tous les u_n sont strictement positifs.
   - Toute suite convergente est bornée.
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 2n = +\infty$.
   - $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{3n^2 + 2n}{n^2 + 1} = 3$.
   - (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0. Donnez un contre-exemple si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$.
   - Si (u_n) est bornée et (v_n) a pour limite 0, alors $(u_n v_n)$ tend vers 0.

2. Étudiez le sens de variation des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

   - $u_n = 3n^2 - n + 1$
   - $v_n = 4n + (-2)^n$
   - $w_n = n^3 + 9n + 1$
   - $\begin{cases} t_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ t_{n+1} = t_n - (n+1)^2 \end{cases}$.

     Déterminez explicitement t_n en fonction de n puis $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n$.

Exercice n°2

Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \begin{cases} n \text{ si n est pair} \\ 2^n \text{ si n est impair} \end{cases}$?

Et de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par $v_n = \begin{cases} n \text{ si n est pair} \\ -n \text{ si n est impair} \end{cases}$?

Exercice n°3

1. Donnez un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) non bornées, dont le produit $(u_n v_n)$ est borné.

2. Donnez un exemple d'une suite (θ_n) qui tend vers $+\infty$ et telle que $(\sin(\theta_n))$ converge.

Exercice n°4

VRAI ou FAUX ?

1. La somme de deux suites divergentes est divergente.
2. La somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
4. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
5. Si pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et que (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell > 0$.
6. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n^4 + 1} - n^2$ est bornée.
7. Si $u_n v_n$ tend vers 0, alors (u_n) ou (v_n) est bornée.

Rappels de cours : Théorèmes d'existence de limite.

1. Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.
2. Théorème d'encadrement : on suppose qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.
3. Toute suite croissante (resp. décroissante) et non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Rappels de cours : Recherche de la valeur d'une limite éventuelle.
Soit (u_n) une suite définie par récurrence : $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. Si (u_n) converge, alors sa limite ℓ est l'une des solutions de l'équation $x = f(x)$.

Exercice n°5

On rappelle que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I,\ f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2,5 - 0,9e^{-1,2x}$.

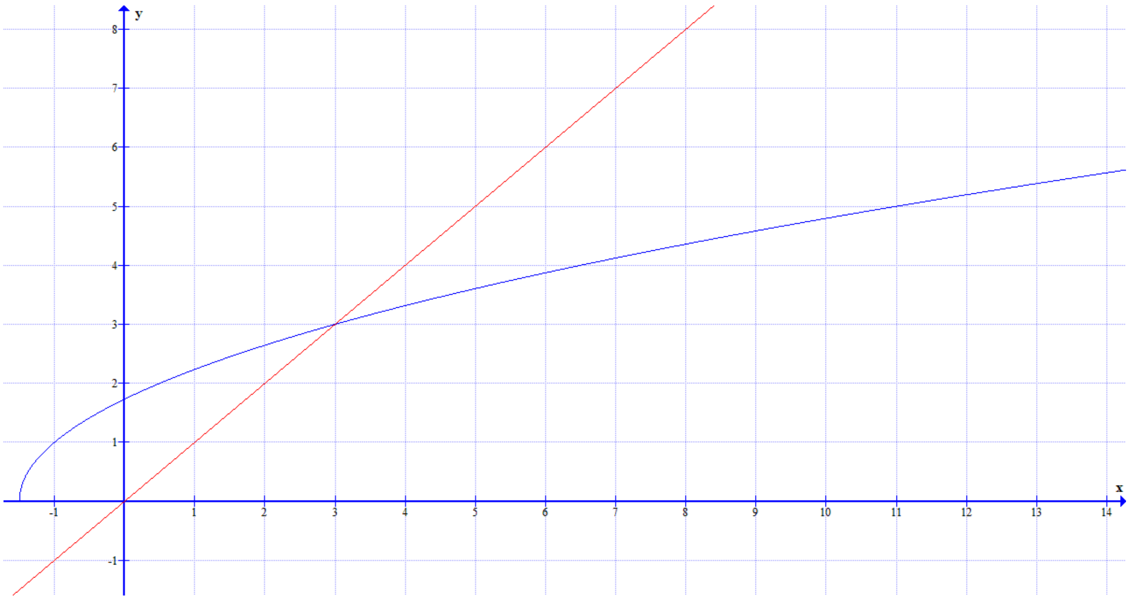
b) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouvez par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2,5$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une valeur ℓ dont vous déterminerez une valeur approchée à 0,01 près à l'aide de votre calculatrice.

Exercice n°6

Considérons la suite $\mathbf{u}$ définie par $u_0 \in D_f = [-3/2; +\infty[$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = x$.



1. Résoudre sur D_f l'équation $f(x) = x$. Quel est l'intérêt de ceci ?

2. Étudier graphiquement selon les différentes valeurs de $u_0 \in D_f$ la limite éventuelle de la suite $\mathbf{u}$.

3. **Méthode 1** :

   (a) Étudier les variations de la fonction f.

   (b) Justifier que les intervalles $I_1 = [-3/2; 3]$ et $I_2 =]3; +\infty[$ sont stables par f. En déduire que la suite $\mathbf{u}$ est parfaitement définie et que si $u_0 \in I_1$ (resp. I_2), alors pour tout entier naturel n : $u_n \in I_1$ (resp. I_2).

   (c) Prouver que si $u_0 \in I_1$, alors pour tout entier naturel n : $-3/2 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$. En déduire que la suite $\mathbf{u}$ converge et préciser sa limite.

   (d) Prouver que si $u_0 \in I_2$, alors pour tout entier naturel n : $3 \leq u_{n+1} \leq u_n$. En déduire que la suite $\mathbf{u}$ converge et préciser sa limite.

4. **Méthode 2** :

   (a) Choisissons $u_0 > 3$. Justifier que pour tout entier naturel n : $u_n > 3$.

   (b) Prouver que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{2u_n - 6}{\sqrt{2u_n + 3} + 3}$.

   En déduire que $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \dfrac{2}{3}(u_n - 3)$

   (c) En déduire que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n (u_0 - 3)$.

   Quelle est la limite de la suite $\mathbf{u}$?

   (d) Adapter la preuve au cas où $u_0 \in [0; 3]$.

Exercice n°7

1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{x}{3}$ d'inconnue $x \in [-1; +\infty[$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{3(n+1)}$.

3. En déduire un réel $\lambda > 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\lambda}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

4. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{n\geq 1}$ converge. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Rappels de cours : Théorèmes de comparaison.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, que (u_n) converge vers ℓ et que (v_n) converge vers ℓ'. Alors $\ell \leq \ell'$.

2. On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Application : après avoir prouvé que pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier naturel n que $(1+x)^n \geq 1 + nx$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.

Exercice n°8

On appelle suite de Sylvester la suite (s_n) définie par $s_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $s_{n+1} = 1 + s_0 \times s_1 \times \cdots \times s_n$.

a) Prouvez que $\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.

b) Prouvez que $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n$ est un entier et $s_n \geq n+2$. Quelle est la limite de (s_n) ?

c) Simplifiez la différence $\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$

d) En déduire la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$ (pensez aux simplifications télescopiques).

Rappels de cours : Opérations algébriques sur les limites.
Dans tout ce qui suit, (u_n) et (v_n) désignent des suites à termes réels, ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

Somme et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $+\infty-\infty$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $u_n = n+\ell$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $u_n = 2n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite en posant $u_n = n+(-1)^n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $(u_n+v_n) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Produit et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\ell\ell'$	∞	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $\infty\times\mathbf{0}$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $u_n = \dfrac{\ell}{n}$ et $v_n = n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite en posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $(u_n v_n) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Remarquons que le produit d'une constante réelle k par le terme général u_n d'une suite ne pose aucun problème : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n = k\ell$.
Si $k\neq 0$ et si la limite de **u** est infinie, il s'agit d'appliquer la règle des signes. Et si $k=0$??? Nous n'osons pas insulter l'intelligence du lecteur avec ce cas !

Inverse et limites

			$u_n > 0$ **apcr**	$u_n < 0$ **apcr**	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	??

Conjuguant les tableaux des produit et inverse, on obtient celui des quotients :

Quotient et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec v_n de signe constant	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	??	??

Retenons donc les quatre formes indéterminées au programme du secondaire :

$$\boxed{+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}}$$

Signalons enfin un résultat très utile de composition que nous utilisons fréquemment dans le cadre des fonctions continues.

Théorème : Soit $\mathbf{u}$ une suite réelle à valeurs dans un intervalle I et soit f une fonction définie sur I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Point technique : Soit $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, où P et Q sont des polynômes de degrés respectifs p et q : $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots a_0$ et $Q(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \cdots + b_0$. Alors : (u_n) et (v_n) définie par $v_n = \dfrac{a_p}{b_q} n^{p-q}$ ont la même limite. On peut même préciser :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } p > q \\ 0 \text{ si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} \text{ si p=q} \end{cases}$$

Exercice n°9

Déterminer les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{-3n^2+6n+1}{10n+3}$
2. $u_n = \dfrac{8n^2+1}{n^3+2n^2+3}$
3. $u_n = \dfrac{-6n^2+3n-1}{2n^2+9n-2}$
4. $u_n = \dfrac{5\cos n}{n}$
5. $u_n = \dfrac{5n^2+6\sin n}{7n^2+6n-1}$
6. $u_n = \dfrac{4n+(-1)^n}{5n+1}$
7. $u_n = 1+1,1+1,1^2+1,1^3+\cdots+1,1^n$
8. $u_n = 1+0,25+0,25^2+0,25^3+\cdots+0,25^n$

Exercice n°10

On admet les résultats de **croissance comparée** suivants :
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}=0\ (k\geq 1)}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n^k}=+\infty\ (k\geq 0)}$.

Déterminez les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. a) $u_n = 3n^2-10n+1$ b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+5}{n^3+5n^2+1}$ c) $u_n = \dfrac{3-\ln n}{\sqrt{n}}$
   d) $u_n = (-2)^n$ e) $u_n = \dfrac{6n^2-1}{3n+2}$ f) $u_n = \dfrac{5+3\sin n}{n}$ g) $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
2. a) $u_n = n^{10}e^{-n}$ b) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ d) $u_n = \dfrac{e^n}{n^2}$
3. a) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0,5^n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$ b) $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$
4. a) $u_n = \dfrac{-2}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}(1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1))$

Exercice n°11

On se propose de prouver que les suites de terme général $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$ n'ont pas de limite. Par l'absurde, supposons que (u_n) converge vers un certain réel ℓ.

1. Exprimer $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et de $\cos n$ puis en déduire en faisant tendre n vers $+\infty$ que la suite de terme général v_n converge vers une limite que l'on précisera.

2. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, justifier que $\ell \neq 0$.

3. Exprimer $\sin(2n)$ en fonction de $\sin n$ et de $\cos n$, puis aboutir à une contradiction.

Exercice n°12

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On suppose que le trinôme $X^2 - aX - b$ possède deux racines réelles et distinctes r et r'. On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. A quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle élément de E

2. Trouver quatre réels r, r', λ, λ' pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $F_n = \lambda r^n + \lambda' r'^n$.

3. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n$.

Exercice n°13

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une des suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

On supposera ici que $\mathbf{u}$ est croissante et $\mathbf{v}$ décroissante.

1. Justifier que la suite $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ est croissante.

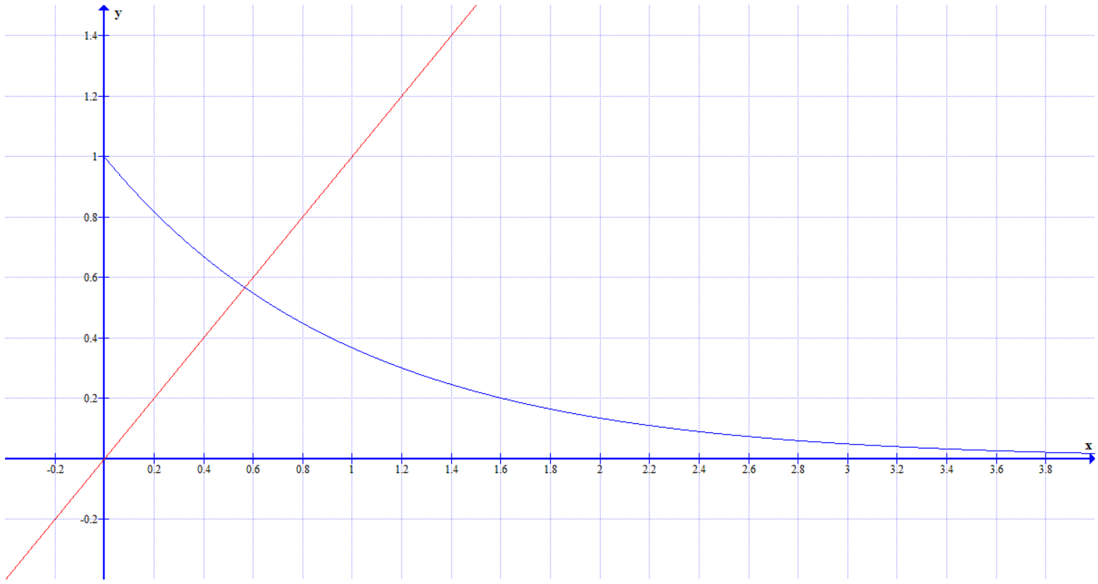
2. Prouver par l'absurde que pour tout entier naturel n : $u_n \leq v_n$.

3. Prouver que la suite $\mathbf{u}$ est majorée. En déduire qu'elle converge vers une limite que l'on notera ℓ_u. Justifier de même que la suite $\mathbf{v}$ converge vers une limite que l'on notera ℓ_v.

4. Prouver enfin que $\ell_u = \ell_v$.

Exercice n°14

Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = e^{-u_n}$. On donne ci-dessous la courbe représentative de f et la droite D d'équation $y = x$.



1. Représenter les 5 premiers termes de la suite u sur l'axe des abscisses. Semble-t-elle monotone (croissante ou décroissante) ?

2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x}$.

3. Justifier brièvement que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie et que tous ses termes u_n appartiennent à $[0; 1]$.

4. Prouver que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution α dans $\mathbb{R}^+$ et donner un encadrement de α à 10^{-2} près. Quel sens peut-on donner à α ?

5. Prouver que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et majorée par α puis décroissante et minorée par α. En déduire qu'elles sont convergentes.

6. Il semble délicat de démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$, ce qui prouverait que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergentes de même limite. Ainsi, la suite $\mathbf{u}$ convergerait vers cette limite commune ℓ. Pouvez-vous donner la valeur de ℓ ?

7. On note $h = f \circ f : \mathbb{R}^+ \to [0; 1]$.

   (a) Prouver que tout point fixe de f *i.e* toute valeur $x_0 \in D_f$ telle que $f(x_0) = x_0$, est aussi un point fixe de h.

   (b) Justifier que l'équation $h(x) = x$ a une unique solution $\beta \in \mathbb{R}^+$. Comparer β à α.

   (c) En remarquant que $u_{2n} = h(u_{2n-2})$ et que $u_{2n+1} = h(u_{2n-1})$, justifier que la suite $\mathbf{u}$ converge vers α.

Exercice n°15

D'après concours général 2021.
Dans tout cet exercice, on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ à valeurs réelles et telles que

$$u_{n+1} = \frac{\exp(u_n)}{n+1}$$

pour tout entier naturel $n \geq 0$.
Pour tout nombre réel x, on note $u(x)$ la suite appartenant à $\mathcal{S}$ et dont le premier terme vaut x. On note également $u_n(x)$ le terme d'indice n de cette suite. Ainsi, $u_0(x) = x$ et $u_1(x) = \exp(x)$.

Partie A

1. Démontrer que toute suite appartenant à $\mathcal{S}$ est strictement positive à partir du rang 1.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geq 2$ pour lequel $u_N \leq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0.

3. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que si cette suite ne converge pas vers 0, alors elle diverge vers $+\infty$.

Partie B

Dans la suite, on note E_0 l'ensemble des réels x pour lesquels la suite $u(x)$ converge vers 0, et E_∞ l'ensemble des réels x pour lesquels $u(x)$ diverge vers $+\infty$

1. Démontrer que $0 \in E_0$.

2. a) Démontrer que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto u_n(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   b) En déduire que si $x \in E_0$, alors l'intervalle $]-\infty; x]$ est inclus dans E_0.

3. a) Démontrer que la fonction $x \mapsto e^x - x(x+1)$ est strictement positive sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

   b) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite appartenant à $\mathcal{S}$. Démontrer que s'il existe un rang $N \geq 1$ tel que $u_N \geq N+1$, alors $(u_n)_{n\geq 0}$ diverge vers $+\infty$.

   c) Démontrer que $1 \in E_\infty$.

4. Démontrer que si $x \in E_\infty$, alors l'intervalle $[x; +\infty[$ est inclus dans E_∞.

Partie C

Nous allons maintenant prouver qu'il existe un réel δ tel que l'intervalle $]-\infty; \delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $[\delta; +\infty[$ est inclus dans E_∞.

1. On définit deux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ de la façon suivante.

On pose $a_0 = 1,\ b_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, on pose :
$a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $\dfrac{a_n + b_n}{2} \in E_0$ et
$a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ sinon.

a) Démontrer que les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont convergentes et ont même limite.

b) Appelons δ la limite commune aux suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$. Démontrer que $]-\infty;\delta[$ est inclus dans E_0 et l'intervalle $]\delta;+\infty[$ est inclus dans E_∞.

Il ne nous reste donc plus qu'à prouver que $\delta \in E_\infty$.

2. On pose $c_2 = \ln(\ln(2))$, $c_3 = \ln(\ln(2\ln(3)))$, et plus généralement, pour tout entier $\ell \geq 2$: $c_\ell = \ln(\ln(2\ln(3\ln(\ldots\ln((\ell-1)\ln(\ell))\ldots))))$.
Démontrer que pour tout entier $\ell \geq 2$, $c_\ell \in E_0$.

3. Démontrer que la suite $(c_\ell)_{\ell\geq 2}$ converge.

4. Démontrer enfin que $\delta \in E_\infty$.