Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Classe : Terminale spé maths Année : 2024-2025

Rappels de cours : Limite d'une suite.
Dans tout ce qui suit, **u** ou (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite à termes réels et ℓ un réel.

Définitions :

1. On dit que (u_n) a pour limite $+\infty$ (ou encore que u_n tend vers $+\infty$) si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n > A$.
   Formellement : $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies u_n > A$.
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$.

2. On dit que (u_n) a pour limite $-\infty$ (ou encore que u_n tend vers $-\infty$) si pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $u_n < -A$.
   Formellement : $(\forall A > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies u_n < -A$.
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty}$.

3. On dit que (u_n) a pour limite ℓ (ou encore que u_n tend vers ℓ) si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.
   Formellement : $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}), n \geq N \implies |u_n - \ell| < \epsilon$.
   On écrit $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

   Remarque : $|u_n - \ell| < \epsilon \iff u_n \in]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$.

Théorème-définition : Si une suite (u_n) possède une limite, alors celle-ci est unique. On peut alors parler de **LA** limite de la suite (u_n). On dit que la suite (u_n) est **convergente** si elle possède une limite finie. Sinon, on dit que (u_n) est **divergente**.

ATTENTION, Toutes les suites n'ont pas de limite. Par exemple les suites de terme général $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-2)^n$, $w_n = \sin n$, $t_n = \cos n$.

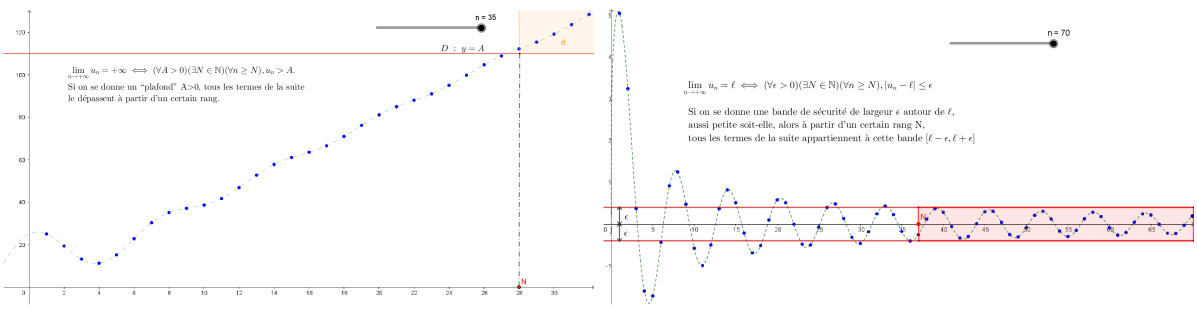

Figure 1: Limite infinie (à gauche) et finie (à droite)

Exercice n°1

1. En revenant à la définition de la limite, prouvez que :

   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 - 2n = +\infty$.
   - (u_n) tend vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ tend vers 0. Donnez un contre-exemple si (u_n) tend vers $\ell \neq 0$.
   - Si (u_n) est bornée et (v_n) a pour limite 0, alors $(u_n v_n)$ tend vers 0.

2. On se propose de prouver que les suites de terme général $u_n = \sin n$ et $v_n = \cos n$ n'ont pas de limite. Par l'absurde, supposons que (u_n) converge vers un certain réel ℓ.

   - Exprimer $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et de $\cos n$ puis en déduire en faisant tendre n vers $+\infty$ que la suite de terme général v_n converge vers une limite que l'on précisera.
   - En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, justifier que $\ell \neq 0$.
   - Exprimer $\sin(2n)$ en fonction de $\sin n$ et de $\cos n$, puis aboutir à une contradiction.

Exercice n°2

Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \begin{cases} n \text{ si n est pair} \\ 2^n \text{ si n est impair} \end{cases}$?

Et de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \begin{cases} n \text{ si n est pair} \\ -n \text{ si n est impair} \end{cases}$?

Exercice n°3

Étudiez le sens de variation des suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1. $u_n = 3n^2 - n + 1$
2. $v_n = 4n + (-2)^n$
3. $w_n = n^3 + 9n + 1$
4. $\begin{cases} t_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\ t_{n+1} = t_n - (n+1)^2 \end{cases}$.

   Déterminez explicitement t_n en fonction de n.

Exercice n°4

VRAI ou FAUX ?

1. La somme de deux suites divergentes est divergente.
2. La somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente.
3. Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
4. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
5. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et que (u_n) converge vers ℓ, alors $\ell > 0$.
6. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$ est bornée.
7. Si $u_n v_n$ tend vers 0, alors (u_n) ou (v_n) est bornée.

Rappels de cours : Théorèmes d'existence de limite.

1. Toute suite croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge.
2. Théorème d'encadrement : on suppose qu'à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n \leq w_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
3. Toute suite croissante (resp. décroissante) et non majorée (resp. non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Rappels de cours : Recherche de la valeur d'une limite éventuelle.

Soit (u_n) une suite définie par récurrence : $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue. Si (u_n) converge, alors sa limite ℓ est l'une des solutions de l'équation $x = f(x)$.

Exercice n°5

On admet que si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2,5 - 0,9e^{-1,2x}$.

b) On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$. Prouvez par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2,5$$

c) En déduire que la suite (u_n) converge vers une valeur ℓ dont vous déterminerez une valeur approchée à 0,01 près à l'aide de votre calculatrice.

Exercice n°6

1. Résoudre l'inéquation $\sqrt{1+x} \geq 1+\frac{x}{3}$ d'inconnue $x \in [-1;+\infty[$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \geq 1+\frac{1}{3(n+1)}$.

3. En déduire un réel $\lambda > 0$ pour lequel pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{\lambda}{(n+1)\sqrt{n+1}}$.

4. En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}\right)_{n\geq 1}$ converge. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Rappels de cours : Théorèmes de comparaison.

1. On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$, que (u_n) converge vers ℓ et que (v_n) converge vers ℓ'. Alors $\ell \leq \ell'$.

2. On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \geq v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. On suppose qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Application : après avoir prouvé que pour tout réel $x \geq 0$ et tout entier naturel n que $(1+x)^n \geq 1+nx$, en déduire que $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ si $q > 1$.

Exercice n°7

On appelle suite de Sylvester la suite (s_n) définie par $s_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $s_{n+1} = 1 + s_0 \times s_1 \times \cdots \times s_n$.

a) Prouvez que $\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = s_n^2 - s_n + 1$.

b) Prouvez que $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n$ est un entier et $s_n \geq n+2$. Quelle est la limite de (s_n) ?

c) Simplifiez la différence $\frac{1}{s_n - 1} - \frac{1}{s_{n+1} - 1}$

d) En déduire la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{s_k}$ (pensez aux simplifications télescopiques).

Rappels de cours : Opérations algébriques sur les limites.
Dans tout ce qui suit, (u_n) et (v_n) désignent des suite à termes réels, ℓ et ℓ' sont deux nombres réels.

Somme et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $+\infty-\infty$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $u_n = n+\ell$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $u_n = 2n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite en posant $u_n = n+(-1)^n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $(u_n+v_n) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Produit et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell\neq 0$	$\ell\neq 0$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n$	$\ell\ell'$	∞	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $\infty\times\mathbf{0}$:

- On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $u_n = \dfrac{\ell}{n}$ et $v_n = n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = \ell$.
- On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = +\infty$.
- On peut ne pas obtenir de limite en posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $(u_nv_n) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Remarquons que le produit d'une constante réelle k par le terme général u_n d'une suite ne pose aucun problème : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} ku_n = k\ell$.
Si $k\neq 0$ et si la limite de $\mathbf{u}$ est infinie, il s'agit d'appliquer la règle des signes. Et si $k=0$??? Nous n'osons pas insulter l'intelligence du lecteur avec ce cas !

Inverse et limites

			$u_n > 0$ **apcr**	$u_n < 0$ **apcr**	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	??

Conjuguant les tableaux des produit et inverse, on obtient celui des quotients :

Quotient et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec v_n de signe constant	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	??	??

Retenons donc les quatre formes indéterminées au programme du secondaire :

$$\boxed{+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}}$$

Signalons enfin un résultat très utile de composition que nous utilisons fréquemment dans le cadre des fonctions continues.

Théorème : Soit **u** une suite réelle à valeurs dans un intervalle I et soit f une fonction définie sur I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Point technique : Soit $u_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, où P et Q sont des polynômes de degrés respectifs p et q : $P(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \dots a_0$ et $Q(x) = b_q x^q + b_{q-1}x^{q-1} + \dots + b_0$. Alors : (u_n) et (v_n) définie par $v_n = \dfrac{a_p}{b_q} n^{p-q}$ ont la même limite. On peut même préciser :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} \pm\infty \text{ si } p > q \\ 0 \text{ si } p < q \\ \dfrac{a_p}{b_q} \text{ si p=q} \end{cases}$$

Exercice n°8

Déterminer les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. $u_n = \dfrac{-3n^2+6n+1}{10n+3}$
2. $u_n = \dfrac{8n^2+1}{n^3+2n^2+3}$
3. $u_n = \dfrac{-6n^2+3n-1}{2n^2+9n-2}$
4. $u_n = \dfrac{5\cos n}{n}$
5. $u_n = \dfrac{5n^2+6\sin n}{7n^2+6n-1}$
6. $u_n = \dfrac{4n+(-1)^n}{5n+1}$
7. $u_n = 1+1,1+1,1^2+1,1^3+\cdots+1,1^n$
8. $u_n = 1+0,25+0,25^2+0,25^3+\cdots+0,25^n$

Exercice n°9

On admet les résultats de **croissance comparée** suivants :
$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}=0\ (k\geq 1)}$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n^k}=+\infty\ (k\geq 0)}$.

Déterminez les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. a) $u_n = 3n^2-10n+1$ b) $u_n = \dfrac{2n^2-3n+5}{n^3+5n^2+1}$ c) $u_n = \dfrac{3-\ln n}{\sqrt{n}}$
   d) $u_n = (-2)^n$ e) $u_n = \dfrac{6n^2-1}{3n+2}$ f) $u_n = \dfrac{5+3\sin n}{n}$ g) $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
2. a) $u_n = n^{10}e^{-n}$ b) $u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ d) $u_n = \dfrac{e^n}{n^2}$
3. a) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0,5^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ b) $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
4. a) $u_n = \dfrac{-2}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ b) $u_n = \dfrac{1}{n^2}(1\times 2+2\times 3+\cdots+n\times(n+1))$