Limite d'une fonction

Approche intuitive
épisode 0 : Heuristique de la notion de limite
Terminale spécialité maths

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

October 25, 2024

Les sentiers mathématiques : troisième randonnée

Introduction

Ce diaporama, basé sur l'intuition, et s'appuyant sur le cours de première et de terminale concernant les suites numériques, se veut avant tout très simple d'approche à travers de nombreux exemples qui nous permettront ultérieurement de passer à l'aspect théorique au programme. *Sentir* les concepts, pouvoir se forger une intuition sur des exemples standards ou des graphiques, mais aussi se garder de généralisations abusives à l'aide de contre-exemples : voilà le seul but de ce document !

Un document de synthèse sur la notion de limite d'une fonction en un réel ou l'infini sera donné dès le début ! Associé à un document très pratique de calcul dans l'esprit des questions posées au BAC.

S'en suivront d'autres diaporamas associés à des capsules vidéos permettant d'affiner l'intuition des élèves et de leur donner une ouverture vers le supérieur. Aucun résultat Hors-Programme ne sera utilisé !

Programme de ce diaporama

Un panorama détaillé de ce diaporama

Diaporamas complémentaires associés

Ces diaporamas permettent à l'élève d'affiner sa compréhension de la notion de limite d'une fonction selon deux niveaux :

- Revenir sur les définitions du cours et leur mise en œuvre calculatoire pour les exercices type bac,
- Approfondir les définitions du cours (au programme de terminale) et dégager les méthodes mises en œuvre au niveau L1 /Maths sup.

1. Aspect calculatoire: formes indéterminées & co
2. Théorie : limite infinie en l'infini
3. Théorie : limite finie en l'infini
4. Théorie : limite infinie en un réel
5. Théorie : limite finie en un réel
6. Le cours : document de synthèse (pdf)

Nous insisterons aussi sur le cas des fonctions qui n'ont pas de limite (en l'infini, en un réel).

1. Rappels sur la notion de fonction

Notion de fonction réelle de la variable réelle

1. On appelle fonction réelle (de la variable réelle) toute relation f entre un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui à un réel $x \in D$ associe un **unique** réel $f(x)$.
2. $f(x)$ est appelé L'**image** de x par f et x est UN **antécédent** de $y = f(x)$ par f.
3. L'ensemble des images de f se note $f(D)$: c'est par définition $f(D) = \{f(x) \in \mathbb{R}, x \in D\}$.
   Attention : si $D = [a; b]$, en général $f([a; b]) \neq [f(a); f(b)]$.
4. Sauf précision du contraire, **l'ensemble de définition** D_f de f est l'ensemble de tous les réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ ait un sens i.e puisse être calculée.

   Par exemple la fonction inverse définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ a pour ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}^*$.

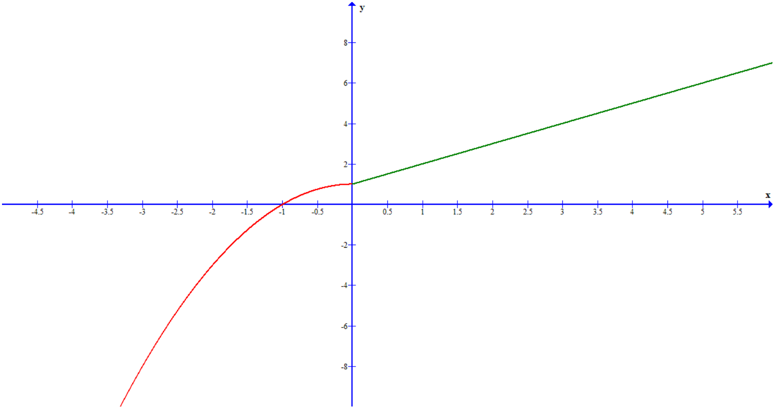
Exemples

Déterminer l'ensemble de définition D_f des fonctions définies par :

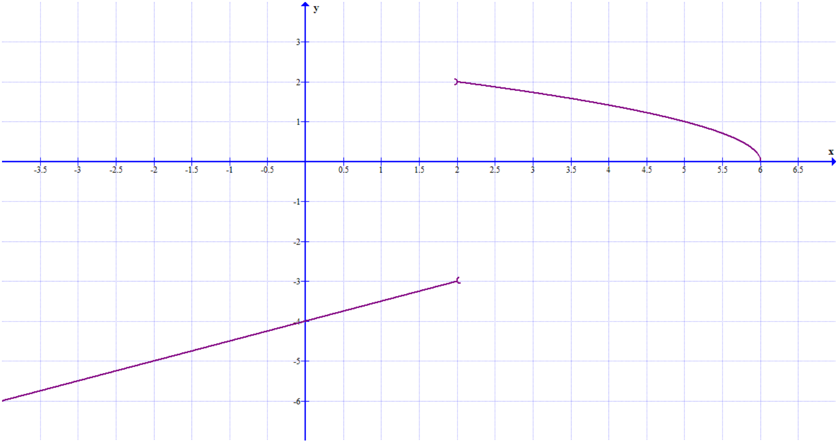
1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+5x-1}$
2. $g(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2+5x-1}}$
3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2+5x-1}$
4. $i(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+5x-1}}$
5. $j(x) = \dfrac{1}{e^x-1}$
6. $k(x) = \dfrac{1}{\sqrt{e^x-1}}$

Remarquons qu'une fonction n'a pas forcément une unique expression sur son ensemble de définition. Par exemple, soit f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 \text{ si } x \leq 0 \\ x + 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$



Un autre exemple de fonction définie "par morceaux" : Soit f la fonction définie sur $D =]-\infty ; 6] \setminus \{2\}$ par $f(x) = \begin{cases} 0,5x - 4 \text{ si } x < 2 \\ \sqrt{6-x} \text{ si } x > 2 \end{cases}$.



Restriction et prolongement d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble D, A un sous-ensemble de D : $A \subset D$ et B un sur-ensemble de D : $D \subset B$ (sauf si $D = \mathbb{R}$)

1. On dit que <u>la</u> fonction $\tilde{f}$ est la **restriction** de f à A, et on note $\tilde{f} = f_{|A}$, si pour tout réel $x \in A$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.
2. On dit que la fonction g définie sur B est <u>UN</u> **prolongement** de f si pour tout réel $x \in D$, $g(x) = f(x)$.

Remarques :

1. La restriction d'une fonction f à un sous-ensemble de son ensemble de définition est unique, alors que f peut avoir une infinité de prolongements.
2. Par exemple, considérons la fonction inverse définie sur $D = \mathbb{R}^*$. On peut la prolonger à $\mathbb{R}$ en entier en définissant $g(x) = 1/x$ sur D et en attribuant à g n'importe quelle valeur en 0.

Composée de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et sur D_g.

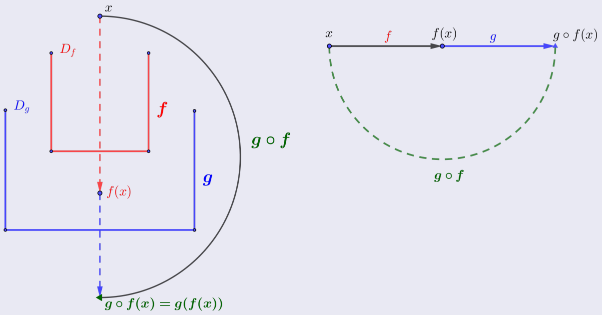
1. Si l'ensemble image de D_f par f est inclus dans l'ensemble de définition D_g de g : $f(D_f) \subset D_g$, alors on peut définir sur D_f la **fonction composée de** g **par** f, notée $\underline{g \circ f}$ par $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}(x) = g(f(x))$.
   On calcule d'abord $f(x)$, puis ensuite l'image de $f(x)$ par g : $g(f(x))$.
2. De la même manière, si $f(D_g) \subset D_f$, alors on peut définir sur D_g la **fonction composée de** f **par** g, notée $\underline{f \circ g}$ par $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}(x) = f(g(x))$.

ATTENTION : en général $g \circ f \neq f \circ g$!

Nous allons voir dans la diapositive suivante une manière de visualiser ce procédé.

Composée de deux fonctions

Dans l'écriture $g \circ f$, la fonction f agit en premier, suivie de la fonction g : c'est comme lire de droite à gauche l'écriture $g \circ f$.



Exemples de composition et de décomposition

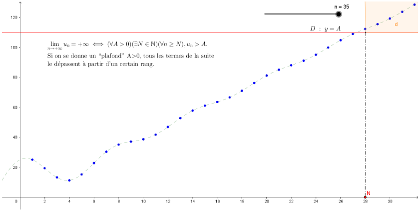
1. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$ et $g(x) = x^2 - 3x + 1$.
   Déterminez les expressions de $g \circ f(x)$ et de $f \circ g(x)$.
2. Soit u la fonction définie sur D (à déterminer) par $u(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+5}}$.
   Écrire $u(x)$ sous la forme $g \circ f(x)$. Écrire alors $v(x) = f \circ g(x)$.

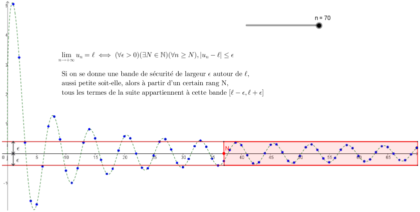
2. Rappels sur les limites des suites numériques

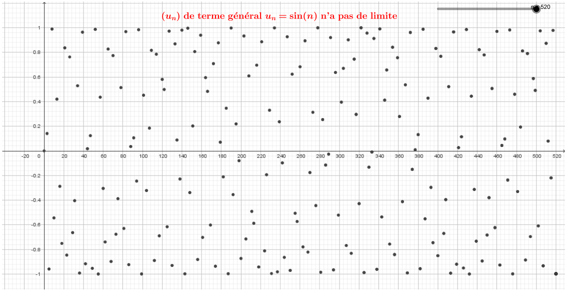
Nous avons déjà rencontré la notion de limite d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où nous faisions tendre la variable entière n vers $+\infty$ et observions le comportement de u_n:

1. u_n pouvait devenir infiniment grand (positivement ou négativement), en fait aussi grand que voulu pourvu que n soit lui-même assez grand. On écrivait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. u_n pouvait se rapprocher autant que voulu d'une valeur réelle ℓ particulière (nécessairement unique) pourvu que n soit lui-même assez grand. On écrivait $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$
3. u_n pouvait aussi être borné sans se rapprocher d'une valeur particulière : $u_n = (-1)^n$ ou $u_n = \cos(n)$, ou même ne pas être borné sans pour autant se rapprocher de $\pm\infty$: $u_n = (-2)^n$.
   En revanche, les *suites extraites* (u_{2n}) ou (u_{2n+1}) pouvaient elles, posséder des limites !

Dans tous les cas, il n'y avait pas le choix : la variable entière *n* ne pouvait que tendre vers $+\infty$.







Premières notions sur la limite d'une fonction

Le cas des fonctions réelles de la variable réelle sera plus complexe.
En effet la variable x de la fonction f vit dans son ensemble de définition D.
La variable x pourra donc selon la "forme" de D :

- tendre vers $\pm\infty$.
- tendre vers un réel a appartenant à la *frontière* de D (mais pas à D).
- tendre vers un réel a appartenant à D.

Nous détaillerons donc chacun de ces cas en nous attachant particulièrement aux deux derniers qui recèlent des subtilités.

3. Un exemple de limite infinie en l'infini

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

Donnons un tableau des valeurs de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

x	-1000	-100	-50	-20	-10	0	10	20	50	100	1000
$f(x)$	-1997	-197	-97	-37	17	3	23	43	103	203	2003

Il semble que lorsque x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$), $f(x)$ tende vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. Un exemple de limite infinie en l'infini

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

Donnons un tableau des valeurs de $f(x)$ quand x tend vers $\pm\infty$.

x	-1000	-100	-50	-20	-10	0	10	20	50	100	1000
$f(x)$	-1997	-197	-97	-37	17	3	23	43	103	203	2003

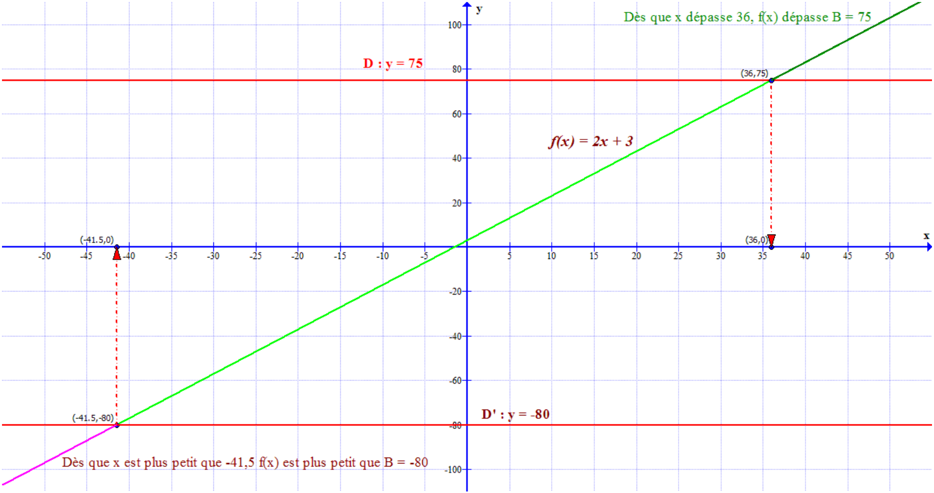
Il semble que lorsque x tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$), $f(x)$ tende vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

On écrit : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Plus précisément, si B désigne un réel strictement positif, dès que x est assez grand : $x > \dfrac{B-3}{2}$, alors $2x + 3 > B$ i.e $f(x) > B$.

Bref, $f(x)$ peut dépasser n'importe quelle valeur strictement positive B (un "*plafond*") pourvu que x soit assez grand.

Représentation graphique



3. Un exemple de limite infinie en l'infini

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

1. On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ car $f(x)$ dépasse n'importe quelle valeur positive B aussi grande soit-elle pourvu que x soit suffisamment grand.
2. On dit que la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ car $f(x)$ passe en dessous n'importe quelle valeur négative B aussi petite soit-elle pourvu que x soit suffisamment négatif.

Retenons : contrairement à notre première intuition dynamique où l'on fait grandir indéfiniment x et on observe $f(x)$ grandir indéfiniment à son tour, en tout cas pour cette fonction strictement croissante, c'est bien par l'axe des ordonnées que l'on va commencer, en se fixant un plafond arbitrairement grand, que la courbe de f finira par dépasser pourvu que x soit assez grand.

4. Un premier exemple de limite finie en l'infini

Soit f la fonction définie sur $D = [0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x/2}$.

Observons les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x devient très grand (positivement).

Donnons un tableau de valeurs lorsque x tend vers $+\infty$.

x	0	1	5	10	20	50	100	200
$f(x)$	1	$0,61$	$0,08$	$0,0067$	$4,5.10^{-5}$	$1,4.10^{-11}$	$1,9.10^{-22}$	$3,7.10^{-44}$

Il semble que lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tende vers 0 en décroissant.

Autrement dit, la distance entre 0 et $f(x)$, soit $|f(x) - 0| = |f(x)|$ se rapproche de 0 lorsque x devient grand.
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Représentation graphique

4. Un second exemple de limite finie en l'infini

Soit f la fonction définie sur $D = [0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x + 5\cos(x)}{x+1}$.

Observons les valeurs prises par $f(x)$ lorsque x devient très grand (positivement).

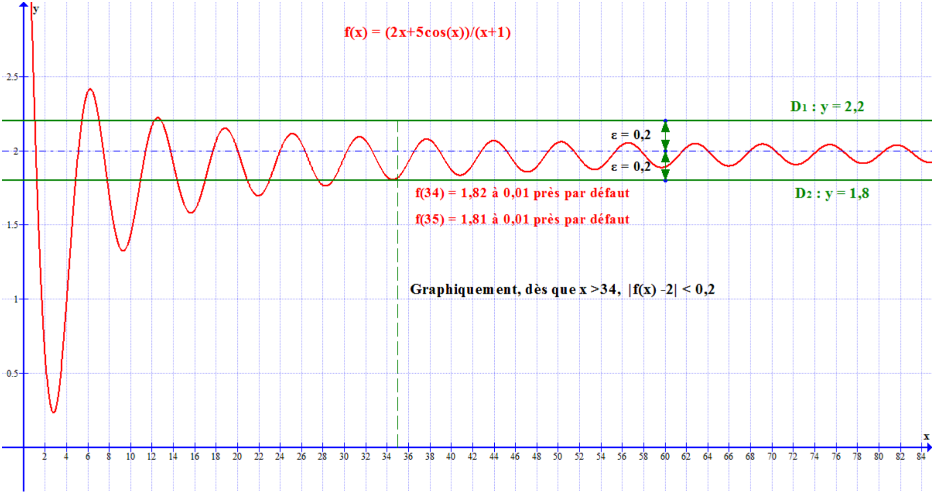
x	1	2	5	10	20	50	100	200
$f(x)$	$2,35$	$0,64$	$1,9$	$1,44$	$2,002$	$2,055$	$2,023$	$2,002$

Il semble que lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tende vers 2 en oscillant autour de 2.

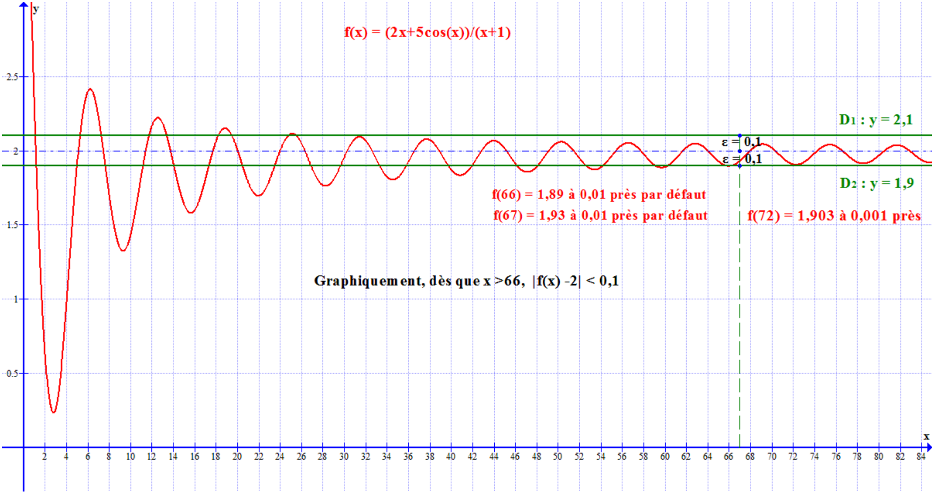
Autrement dit, la distance entre 2 et $f(x)$, soit $|f(x) - 2|$ se rapproche de 0 aussi près que voulu lorsque x est suffisamment grand.

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.

Représentation graphique 1



Représentation graphique 2



4. Un second exemple de limite finie en l'infini

L'intuition

L'idée est que si l'on se donne une "petite bande de sécurité" de largeur 2ϵ ($\epsilon > 0$), aussi petite soit-elle autour de $\ell = 2$, alors pour x suffisamment grand, la courbe représentative de f sera incluse dans cette bande de sécurité.

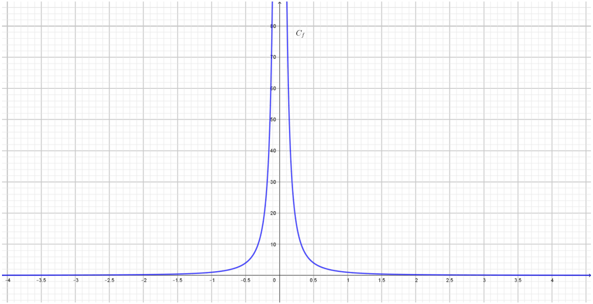
Encore une fois, on part des ordonnées et on revient aux abscisses.

Définitions formelles

1. On dit que la fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $+\infty$ si la distance entre $f(x)$ et ℓ est inférieure à ϵ : $|f(x) - \ell| < \epsilon$, pourvu que x soit suffisamment grand positivement.
2. On dit que la fonction f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $-\infty$ si la distance entre $f(x)$ et ℓ est inférieure à ϵ : $|f(x) - \ell| < \epsilon$, pourvu que x soit suffisamment grand négativement.

5. Un premier exemple de limite infinie en un réel a

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



f est une fonction paire : D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$.

5. Un premier exemple de limite infinie en un réel a

Nous allons à présent nous intéresser au cas où la variable x se rapproche de 0 en laquelle f n'est pas définie (mais 0 est un *point adhérent* à D : pour tout $\alpha > 0$, $D \cap]-\alpha;\alpha[=]-\alpha;\alpha[\setminus \{0\} \neq \emptyset$).

f étant paire, il nous suffira de nous intéresser aux valeurs strictement positives de x arbitrairement proches de 0. Ce que l'on va faire dans ce tableau de valeurs :

x	1	$0,5$	$0,25$	$0,1$	$0,01$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-9}
$f(x)$	1	4	16	100	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}

Il semble que lorsque x tende vers 0, $f(x)$ tende vers $+\infty$.

On écrit : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

5. Un premier exemple de limite infinie en un réel a

Nous allons à présent nous intéresser au cas où la variable x se rapproche de 0 en laquelle f n'est pas définie (mais 0 est un *point adhérent* à D : pour tout $\alpha > 0$, $D\cap]-\alpha;\alpha[=]-\alpha;\alpha[\backslash\{0\} \neq \emptyset$).

f étant paire, il nous suffira de nous intéresser aux valeurs strictement positives de x arbitrairement proches de 0. Ce que l'on va faire dans ce tableau de valeurs :

x	1	0,5	0,25	0,1	0,01	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-9}
$f(x)$	1	4	16	100	10^4	10^6	10^8	10^{12}	10^{18}

Il semble que lorsque x tende vers 0, $f(x)$ tende vers $+\infty$.

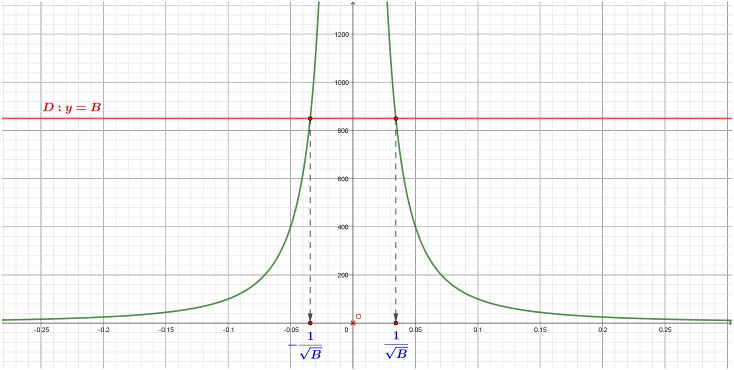
On écrit : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Plus précisément, si B désigne un réel strictement positif, dès que x est assez proche de 0 : $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{B}};\dfrac{1}{\sqrt{B}}\right[\setminus \{0\}$, alors $f(x) > B$.

Bref, $f(x)$ peut dépasser n'importe quelle valeur strictement positive B pourvu que $x \in D$ soit assez proche de 0.

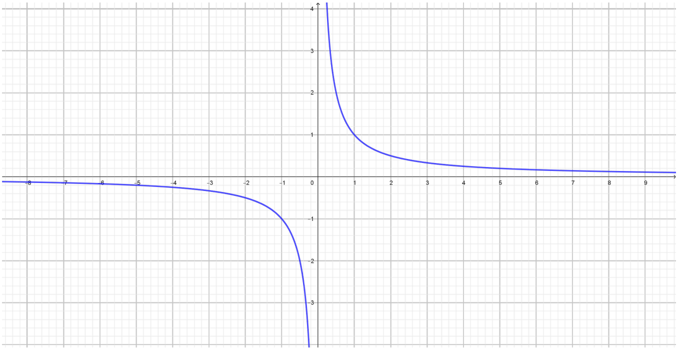
5. Un premier exemple de limite infinie en un réel a

Pour $B > 0$ fixé , l'équation $f(x) = B$ a deux antécédents sur $D = \mathbb{R}^*$: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{B}}$ et $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{B}}$. Comme f strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, alors si $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{B}}; \dfrac{1}{\sqrt{B}}\right[\setminus \{0\}$, $f(x) > B$ (à bien comprendre).



5. Un second exemple de limite infinie en un réel a

Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous :



f est une fonction impaire : D est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.

5. Un second exemple de limite infinie en un réel a

Comme à l'exemple précédent, nous allons nous intéresser au cas où la variable x se rapproche de 0 en laquelle f n'est pas définie (mais 0 est un *point adhérent* à D).

Nous pourrions aussi nous limiter à des valeurs strictement positives de x puisque par imparité $f(-x) = -f(x)$. Mais pour des raisons pédagogiques, nous distinguerons les cas où :

1. x tend vers 0 par valeurs strictement inférieures : $x \to 0, \ x < 0$.
2. x tend vers 0 par valeurs strictement supérieures : $x \to 0, \ x < 0$.

Donnons un tableau des valeurs de $f(x)$ quand x tend vers 0.

x	$-0,1$	$-0,01$	-10^{-4}	-10^{-6}	-10^{-8}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	$0,01$	$0,1$
$f(x)$	-10	-100	-10^4	-10^6	-10^8	10^8	10^6	10^4	100	10

Il semble que lorsque x tend vers 0 par valeurs strictement inférieures (resp. vers 0 par valeurs strictement supérieures), $f(x)$ tende vers $-\infty$ (resp. $+\infty$).

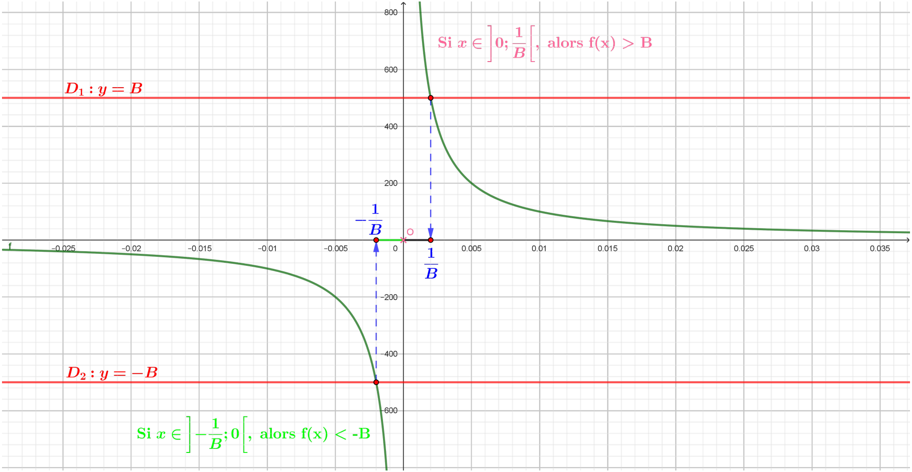
5. Un second exemple de limite infinie en un réel a

Cette exemple nous amène à distinguer la manière dont $x \in D = \mathbb{R}^*$ se rapproche de 0.

1. Lorsque x se rapproche de 0 en restant strictement inférieur à 0 (on travaille donc en fait avec la restriction de f à $D \cap]-\infty; 0[$), $f(x)$ devient de plus en plus négatif.
   On écrit $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
   On parlera de **limite à gauche** de f en 0.
2. Lorsque x se rapproche de 0 en restant strictement supérieur à 0 (on travaille donc en fait avec la restriction de f à $D \cap]0; +\infty[$), $f(x)$ devient de plus en plus positif.
   On écrit $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
   On parlera de **limite à droite** de f en 0.

5. Un second exemple de limite infinie en un réel a

Limites à gauche et à droite de f en 0 différentes : respectivement égales $-\infty$ et à $+\infty$.



5. Limite (à gauche/droite) infinie en un réel a

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et a un réel appartenant à D ou un des *points frontières* de D.

Définitions heuristiques

1. On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D$ suffisamment proche de a tel que $f(x) > B$.
2. On dit que f a pour limite à gauche $+\infty$ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D$ strictement inférieur à a tel que $f(x) > B$.
3. On dit que f a pour limite à droite $+\infty$ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ (aussi grand soit-il) il existe un réel $x \in D$ strictement supérieur à a tel que $f(x) > B$.

5. Limite (à gauche/droite) infinie en un réel a

Soit f **une fonction définie sur un ensemble** D et a un réel appartenant à D ou un des *points frontières* de D.

Définitions formelles

1. On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $x \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap D,\ f(x) > B$.
2. On dit que f a pour limite à gauche $+\infty$ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $x \in]a - \alpha; a[\cap D,\ f(x) > B$.
3. On dit que f a pour limite à droite $+\infty$ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$ il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $x \in]a; a + \alpha[\cap D,\ f(x) > B$.

6. Un premier exemple de limite finie en un réel a

Considérons la fonction f définie sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

6. Un premier exemple de limite finie en un réel a

Considérons la fonction f définie sur $D =]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

A priori, $\underline{f \text{ n'est pas définie en } 1}$, mais pour tout $x \in D$, on peut simplifier l'écriture de $f(x)$ en $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$.

Expression qui tend vers 2 lorsque x tend vers 1. On a :

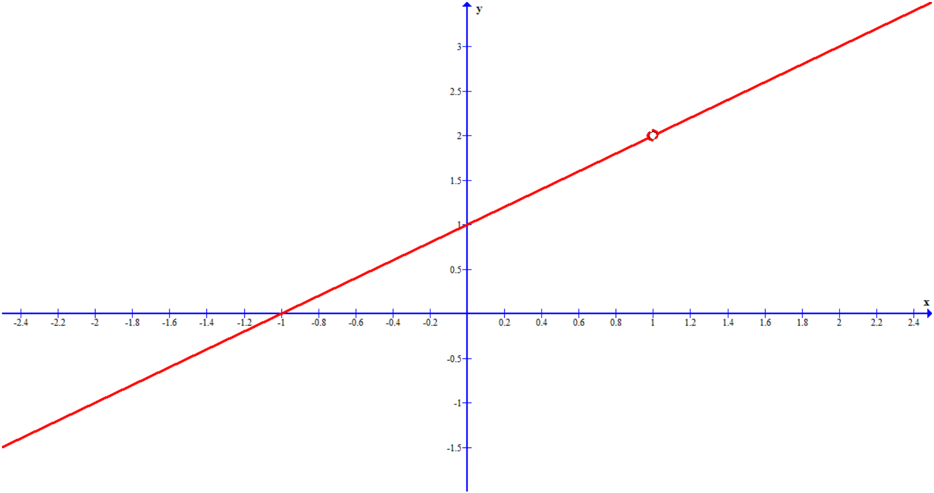
$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 2}.$$

Il est inutile ici de distinguer limite à gauche et à droite de f en 1.

Cependant, on peut remarquer que $\boxed{\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2}$

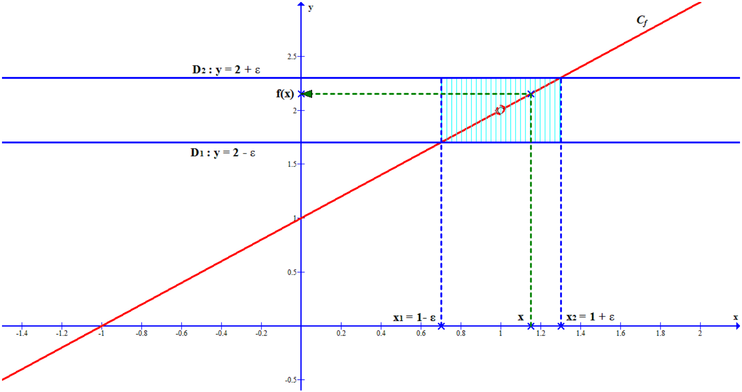
6. Un premier exemple de limite finie en un réel a

Représentation graphique de f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$



6. Un premier exemple de limite finie en un réel a

Donnons-nous un réel $\epsilon > 0$ et traçons une bande de sécurité limitée par les droites D_1 et D_2 d'équations respectives $y = 2 - \epsilon$ et $y = 2 + \epsilon$.
D_1 et D_2 coupent respectivement $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisse $x_1 = 1 - \epsilon$ et $x_2 = 1 + \epsilon$. Pour tout $x \in]x_1; x_2[\cap D$, on a $f(x) \in]2 - \epsilon; 2 + \epsilon[$.



On suppose ici que $\underline{a \notin D}$: f n'est pas définie en a

Définitions heuristiques

1. On dit que f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe un réel $x \in D$ suffisamment proche de a tel que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.
2. On dit que f a pour limite à gauche ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe un réel $x \in D$ strictement inférieur à a tel que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.
3. On dit que f a pour limite à droite ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe un réel $x \in D$ strictement supérieur à a tel que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.

6. Un premier exemple de limite finie en un réel a

On suppose ici que $\underline{a \notin D}$: f n'est pas définie en a

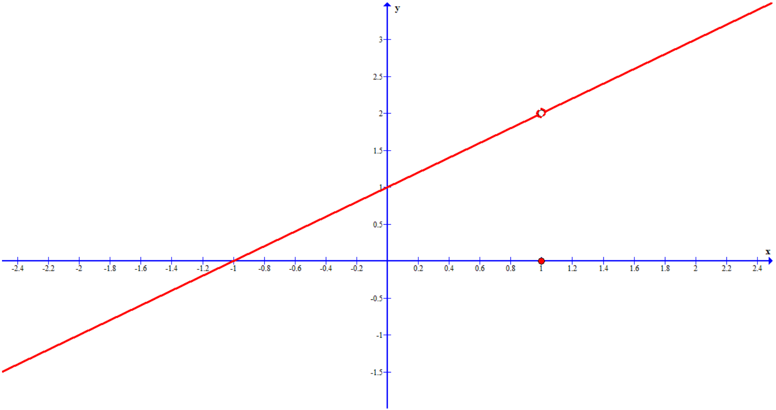
Définitions formelles

1. On dit que f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap D$, $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.
2. On dit que f a pour limite à gauche ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a - \alpha; a[\cap D$ tel que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.
3. On dit que f a pour limite à droite ℓ lorsque x tend vers a, et on note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$ si pour tout réel $\epsilon > 0$ (aussi petit soit-il) il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]a; a + \alpha[\cap D$ tel que $\ell - \epsilon < f(x) < \ell + \epsilon$.

6. Un premier exemple de fonction sans limite en un réel a

Question : Mais que se passerait-il si l'on avait prolongé f sur $\mathbb{R}$ par $\tilde{f}$ en posant $\tilde{f}(1) = 0$ par exemple ?

On a donc ici $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 1 \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{cases}$. On a une *discontinuité* en $x = 1$.



Comme la restriction de $\tilde{f}$ à $]-\infty;1[$ et à $]1;+\infty[$ est exactement f, on a par définition des limites à gauche et à droite de $\tilde{f}$ en $x=1$:

$$\ell^- = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2.$$

De même, $\ell^+ = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 2.$

La fonction $\tilde{f}$ a une limite à gauche et une limite à droite égales en $x=1$: $\ell^- = \ell^+ = 2$.

Cependant, autant f définie sur $D =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ avait une limite en $x=1$: $\ell = 2$, autant $\tilde{f}$ n'en aura pas : et ceci est dû au fait que la valeur prise par $\tilde{f}$ en 1 n'est pas égale à 2.

6. Un premier exemple de fonction sans limite en un réel a

Comme la restriction de $\tilde{f}$ à $]-\infty;1[$ et à $]1;+\infty[$ est exactement f, on a par définition des limites à gauche et à droite de $\tilde{f}$ en $x=1$:

$$\ell^- = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 2.$$

De même, $\ell^+ = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \tilde{f}(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = 2.$

La fonction $\tilde{f}$ a une limite à gauche et une limite à droite égales en $x=1$: $\ell^- = \ell^+ = 2$.

Cependant, autant f définie sur $D =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ avait une limite en $x=1$: $\ell = 2$, autant $\tilde{f}$ n'en aura pas : et ceci est dû au fait que la valeur prise par $\tilde{f}$ en 1 n'est pas égale à 2.

En effet, ce "non recollement" en $x=1$ des deux pans de courbes qui représentent $\mathcal{C}_{\tilde{f}}$ pose problème ! Mais pourquoi ?

f et $\tilde{f}$ se ressemblent en tout point ... sauf un : f et $\tilde{f}$ ont la même expression sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, mais f n'est pas définie en 1, alors que $\tilde{f}$ l'est !

6. De l'importance de l'ensemble de définition

f et $\tilde{f}$ se ressemblent en tout point ... sauf un : f et $\tilde{f}$ ont la même expression sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, mais f n'est pas définie en 1, alors que $\tilde{f}$ l'est !

Commençons par f : f est définie sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = x + 1$ (expression simplifiée) et on a vu précédemment que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, on pourrait se dire que plus x se rapproche de 1 (que ce soit par valeurs strictement inférieures ou supérieures), plus $f(x)$ se rapproche de 2. Mais ce serait oublier les cas où f peut être plus compliquée : osciller par exemple.

6. De l'importance de l'ensemble de définition

f et $\tilde{f}$ se ressemblent en tout point ... sauf un : f et $\tilde{f}$ ont la même expression sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$, mais f n'est pas définie en 1, alors que $\tilde{f}$ l'est !

Commençons par f : f est définie sur $D =]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$ par $f(x) = x + 1$ (expression simplifiée) et on a vu précédemment que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 2$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty; 1[$ et sur $]1; +\infty[$, on pourrait se dire que plus x se rapproche de 1 (que ce soit par valeurs strictement inférieures ou supérieures), plus $f(x)$ se rapproche de 2. Mais ce serait oublier les cas où f peut être plus compliquée : osciller par exemple.

Nous allons reprendre les idées précédentes : partir de l'axe des ordonnées et revenir sur l'axe des abscisses.

6. De l'importance de l'ensemble de définition

On a résumé la situation précédente en se disant que si l'on se donne un petit intervalle $W =]2 - \epsilon; +2 + \epsilon[$ centré en $\ell = 2$, aussi petit soit-il, alors on peut toujours trouver un intervalle $V =]1 - \alpha; 1 + \alpha[$ centré en 1 tel que si x appartient à V mais aussi à D_f, alors $f(x)$ appartient à W.

Remarquons qu'ici on ne pourra jamais remplacer x par 1 car f n'est pas définie en 1. La situation est différente pour $\tilde{f}$ qui elle, est définie en 1 par $\tilde{f}(1) = 0$.

6. De l'importance de l'ensemble de définition

On a résumé la situation précédente en se disant que si l'on se donne un petit intervalle $W =]2 - \epsilon; +2 + \epsilon[$ centré en $\ell = 2$, aussi petit soit-il, alors on peut toujours trouver un intervalle $V =]1 - \alpha; 1 + \alpha[$ centré en 1 tel que si x appartient à V mais aussi à D_f, alors $f(x)$ appartient à W.

Remarquons qu'ici on ne pourra jamais remplacer x par 1 car f n'est pas définie en 1. La situation est différente pour $\tilde{f}$ qui elle, est définie en 1 par $\tilde{f}(1) = 0$.

Si on se donne le même intervalle $W =]2 - \epsilon; +2 + \epsilon[$, alors :

1. Si $x \in]1 - \epsilon; 1[$, on a $\tilde{f}(x) = f(x) \in W$.
2. Si $x \in]1; 1 + \epsilon[$, on a $\tilde{f}(x) = f(x) \in W$.
3. Mais ce n'est pas le cas si $x = 1$ dès lors que ϵ est assez petit : $\epsilon \leq 2$.

Il aurait fallu prolonger f en 1 en posant $\tilde{f}(1) = 2$ (ce qu'on appellera un *prolongement par continuité*) pour que tout se passe bien.

6. De l'importance de l'ensemble de définition

La seule limite possible en 1 pour $\tilde{f}$ aurait été $\tilde{f}(1) = 0$ mais que x se rapproche infiniment de 1 par la gauche ou par la droite, $f(x)$ se rapproche infiniment de 2.

Il va donc falloir nous résoudre à définir proprement ce que signifie que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers $a \in D_f$.

Limite finie en un réel $a \in D$

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et $\underline{a \in D}$.
Comme précédemment, on dit que la fonction f tend vers le réel ℓ si pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $x \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap D$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
Si ce réel ℓ existe, alors il est unique et on l'appelle LA limite de la fonction f en a.
On note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ et nécessairement $\boxed{\ell = f(a)}$.

6. De l'importance de l'ensemble de définition

Preuve

Supposons qu'une fonction f définie sur D admette une limite finie ℓ en $a \in D$ (donc $f(a)$ a bien un sens).
Soit $\epsilon > 0$ quelconque. Comme f admet ℓ pour limite en $a \in D$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $x \in D \cap]a-\alpha; a+\alpha[$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$. Comme $a \in D$, on a en particulier : pour tout $\epsilon > 0$, $|f(a) - \ell| < \epsilon$ (1).
Par l'absurde, supposons $\ell \neq f(a)$, ainsi $|f(a) - \ell| > 0$. L'inégalité (1) étant vraie pour tout $\epsilon > 0$, choisissons $\epsilon = \dfrac{|f(a) - \ell|}{2}$. On a donc $|f(a) - \ell| < \dfrac{|f(a) - \ell|}{2}$. Absurde ! Donc $\ell = f(a)$.

Remarque : Soit f une fonction définie sur D et $a \in D$ ou $a \notin D$ mais adhérent à D : la définition de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ est exactement la même dans les deux cas. Mais dans le premier, on aura forcément $\ell = f(a)$.

Synthèse

Á travers les exemples précédents, nous avons appris à nous méfier des affirmations du type :

1. f tend vers $+\infty$ si quand x devient infiniment grand, $f(x)$ devient aussi infiniment grand.
2. f tend à gauche (resp. à droite) vers ℓ lorsque x tend vers a par valeurs strictement inférieures (resp. strictement supérieures) si quand x devient infiniment proche de a par valeurs strictement inférieures (resp. strictement supérieures), $f(x)$ se rapproche indéfiniment de ℓ.
3. f tend vers ℓ lorsque x tend vers a si quand x devient infiniment proche de a, $f(x)$ se rapproche indéfiniment de ℓ.

Lorsque la fonction f est (strictement) monotone, ces définitions heuristiques peuvent se vérifier, mais si ce n'est pas le cas, il nous faut formaliser davantage cette vision intuitive.

Synthèse

En bref, nous devrons toujours pour définir la notion de limite (à gauche/droite) ou même en l'infini, d'une fonction f de partir de l'axe des ordonnées ("bande de sécurité" ou "plafond") et revenir sur l'axe des abscisses au voisinage d'un réel ou de l'infini !

Il existe aussi des critères séquentiels d'existence / de non-existence d'une limite en un réel a ou en l'infini que nous détaillerons dans les futurs diaporamas précisant les différents cas abordés ici.