Limite d'une fonction

Approche intuitive et théorique
épisode 1 : limite infinie en l'infini
Terminale spécialité maths

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

October 1, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Introduction

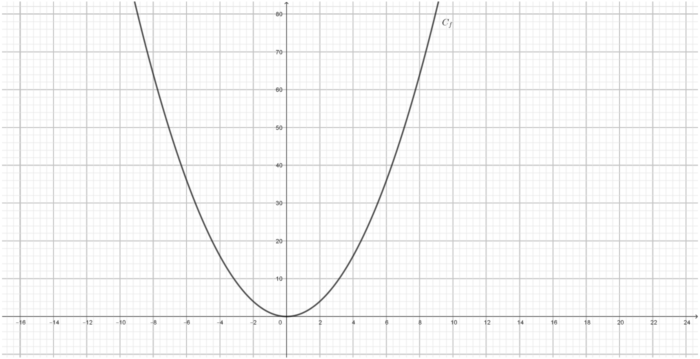
Faisant suite à l'épisode 0 dédié à l'heuristique de la notion de la limite d'une fonction réelle de la variable réelle, nous allons nous concentrer ici sur le cas particulier des fonctions f qui prennent des valeurs infiniment grandes (positives ou négatives) lorsque x prend aussi des valeurs infiniment grandes (positives ou négatives).

Nous garderons toujours à l'esprit de lier les définitions et les propriétés graphiques des fonctions pour "donner vie" ou en tout cas donner un visage à la théorie. Les définitions seront d'ailleurs introduites progressivement et illustrées pour justifier leur bien fondé.

Tout en restant conforme au programme du bac général spécialité maths, nous proposerons à nos cher(e)s lecteurs et lectrices des application théoriques de la définition de limite, plus dans l'esprit des classes du supérieur (Maths sup, L1 orienté maths, ...) afin de leur faire découvrir et si possible apprécier la construction intellectuelle effectuée.
Les aspects pratiques seront traités dans un autre diaporama.

Un exemple de base

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ci-dessous (on l'appelle **fonction carrée**) :



f est une fonction paire : D_f est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in D_f,\ f(-x) = f(x)$.

Un exemple de base

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; son minimum est atteint en $x = 0$ et vaut 0.
On résume ceci dans le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	?	$\searrow$	0	$\nearrow$	?

Notre but est maintenant de remplacer les points d'interrogations.

Un exemple de base

La fonction carrée est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; son minimum est atteint en $x = 0$ et vaut 0.
On résume ceci dans le tableau de variations qui suit :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	?	$\searrow$	0	$\nearrow$	?

Notre but est maintenant de remplacer les points d'interrogations.

Par parité de f, leurs valeurs seront égales. Il nous suffit donc d'observer le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs positives de plus en plus grandes : on dira que x tend vers $+\infty$.

Un exemple de base

Explicitons ceci à l'aide d'un tableau de valeurs :

x	0	1	2	3	4	5	10	20	100	1000
$f(x)$	0	1	4	9	16	25	100	400	10^4	10^6

Il semble que plus x grandisse, plus les termes $f(x)$ deviennent grands ; on pourrait même dire peuvent dépasser à un moment donné toute valeur B fixée à l'avance, aussi grande soit-elle ... Fixons-nous par exemple

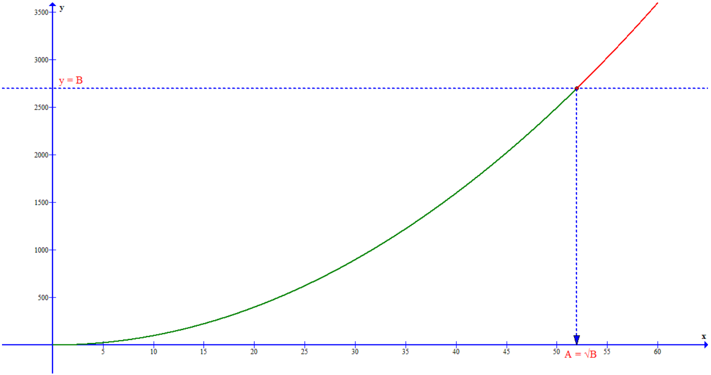
$B = 2500$ (en ordonnée). La droite D d'équation $y = 2500$ coupe la courbe représentative de f en deux points.

Leurs abscisses sont les antécédents de 2500 par f i.e les solutions de l'équation $x^2 = 2500$. Ce sont : -50 et 50.

Comme f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, si $x > 50$, alors $f(x) > 50^2 = 2500$.

Un exemple de base

On peut refaire le même raisonnement avec n'importe quelle valeur $B > 0$ fixée à l'avance (valeur qui se lit sur l'axe des ordonnées).



L'antécédent positif de B par f est $A = \sqrt{B}$. Par stricte croissance de f, si $x > A$, alors $f(x) > B$.

Un exemple de base

On est donc légitimement en état de penser que les points d'interrogation peuvent être remplacés par $+\infty$.
On résume ceci dans le tableau de variations qui suit :

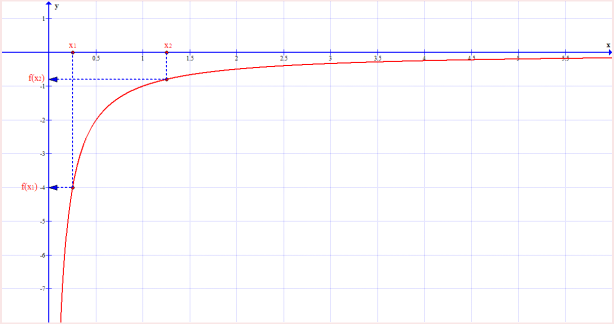
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$\text{On écrit } \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

En chemin vers une définition...

Comment dire que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut si x est assez grand ?

Une "fausse bonne idée" serait de dire que plus x est grand, plus $f(x)$ est grand ! Ceci traduit juste le fait que la fonction f soit croissante. Rien de plus ! Pensez à la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -1/x$ ...



Comment dire que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut si x est assez grand ?

Comme l'exemple précédent nous le suggère, la bonne idée est de se dire que si l'on se donne un "plafond" $B > 0$ aussi grand soit-il, alors la courbe de f finira toujours par le dépasser si x est suffisamment grand.

On part donc des ordonnées et on revient aux abscisses. Comme avec la lecture graphique d'antécédent.

En chemin vers une définition ...

Comment dire que $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut si x est assez grand ?

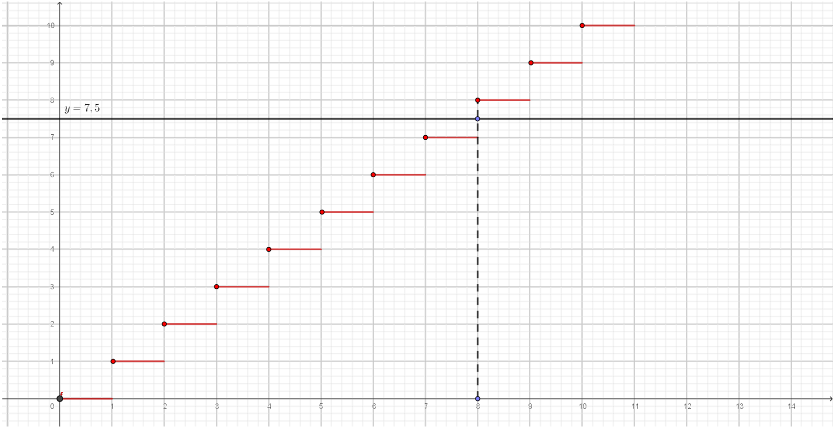
Comme l'exemple précédent nous le suggère, la bonne idée est de se dire que si l'on se donne un "plafond" $B > 0$ aussi grand soit-il, alors la courbe de f finira toujours par le dépasser si x est suffisamment grand.

On part donc des ordonnées et on revient aux abscisses. Comme avec la lecture graphique d'antécédent.

Le cas des fonctions f croissantes (mais non constantes) est particulièrement simple : si on se donne un plafond $B > 0$ quelconque et si x_B désigne un antécédent de B par f, alors dès que $x > x_B$, on aura $f(x) \geq B$.

Attention : cet antécédent n'existe pas toujours. Considérez la fonction partie entière et B non entier par exemple ...

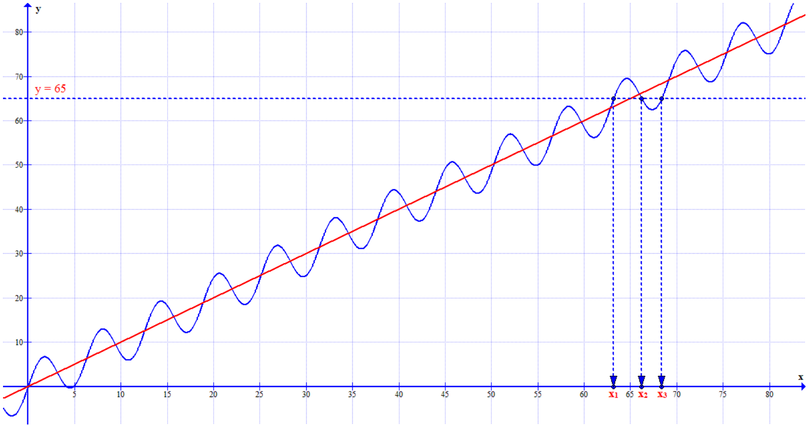
En chemin vers une définition ...



Si $B = 7,5$, alors dès que $x \geq E(B) + 1$, on a $E(x) > B$.
Et ceci fonctionne quelque soit $B \in \mathbb{R}$: pour tout réel B, si $x \geq E(B) + 1$, on a $E(x) > B$.

En chemin vers une définition ...

Attention aussi au cas des fonctions non croissantes ! Ce n'est pas parce que l'on trouve une valeur x_1 tel que $f(x_1) > B$ que toutes les valeurs x supérieures à x_1 vont avoir une image supérieure à B. Considérez l'exemple ci-dessous avec $B = 65$ et $f(x) = x + 5\sin(x)$.



Définition de f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$

Définition

Soit f une fonction définie sur D contenant au moins un intervalle de la forme $[C; +\infty[$. On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout réel $B > 0$, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x > A \implies f(x) > B$.

Remarques

1. On peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges.
2. Cette définition théorique n'est pas toujours facile à mettre en œuvre. On raisonne souvent par analyse-synthèse pour résoudre l'inéquation $f(x) > B$ sur D.
3. Il est parfois utile de minorer $f(x)$ par un intermédiaire simple $g(x)$: $f(x) \geq g(x)$, de sorte à ce que l'inéquation $g(x) > B$ soit simple à résoudre.

Mise en œuvre théorique (destination L1 / Maths sup)

Application 1

Prouvons que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty}$.

1) $D_{\sqrt{\cdot}} = [0; +\infty[$.

Soit $B > 0$ quelconque. On cherche $A > 0$ tel que $x > A \implies \sqrt{x} > B$.

2) **Analyse** : Comme $B > 0$, $\sqrt{x} > B \iff x > B^2$. $A = B^2$ convient.

3) **Synthèse** : Soit $B > 0$. Posons $A = B^2$ et soit $x > A$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on a
$\sqrt{x} > \sqrt{B^2} = |B| = B$.

Conclusion : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Mise en œuvre théorique (destination L1 / Maths sup)

Application 2

Posons $f(x) = x^2 - 2x + 2\cos(x)$ et prouvons que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

1) $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $B > 0$ quelconque. On cherche $A > 0$ tel que $x > A \implies f(x) > B$.

2) **Analyse** : Soit $B > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x^2 - 2x - 2$ car $\cos(x) \geq -1$. Or $x^2 - 2x - 2 = (x-1)^2 - 3$ (forme canonique). On a $(x-1)^2 - 3 > B \iff (x-1)^2 > B + 3 \iff |x-1| > \sqrt{B+3}$. En supposant $x > 1$, on a $x > 1 + \sqrt{B+3}$. Posons alors $A = 1 + \sqrt{B+3}$.

3) **Synthèse** : Soit $B > 0$. Posons $A = 1 + \sqrt{B+3}$ et soit $x > A$. Alors $x - 1 > \sqrt{B+3} > 0$. Par stricte croissance de la fonction carrée sur $[0; +\infty[$, on a $(x-1)^2 - 3 = x^2 - x - 2 > B$. Or $f(x) \geq x^2 - 2x - 2$, d'où $f(x) > B$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Définition de f a pour limite $\pm\infty$ en $\pm\infty$

On définit de même les notions de limite infinie ($\pm\infty$) quand x tend vers $\pm\infty$ (faire des dessins). Si x est destiné à tendre vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on suppose que l'ensemble de définition D de f contient un intervalle de la forme $[C;+\infty[$ (resp. contient un intervalle de la forme $]-\infty;C]$).

Définitions

1. On dit que f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ si pour tout réel B, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x > A \implies f(x) < B$.
2. On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si pour tout réel B, il existe un réel $A < 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x < A \implies f(x) > B$.
3. On dit que f a pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si pour tout réel B, il existe un réel $A < 0$ tel que pour tout $x \in D$, $x < A \implies f(x) < B$.

Exercices

En revenant à la définition théorique, prouvez que :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x+1} = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-2x}}{e^x+1} = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{-x^3}{4x+1}} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{4x^2}{x-1}\right) = +\infty$

Mise en œuvre théorique (destination L1 / Maths sup)

Correction formelle de deux exercices

En revenant à la définition théorique, prouvez que :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x+1} = +\infty$

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{4x^2}{x-1}\right) = +\infty$

Quelques réflexes utiles :

- Lorsque l'on souhaite majorer (resp. minorer) une fraction, penser à majorer (resp. minorer) le numérateur et minorer (resp. majorer) le dénominateur.
- Il est toujours utile d'utiliser un logiciel ou une calculatrice pour se représenter la fonction f.

Mise en œuvre théorique (destination L1 / Maths sup)

Correction de l'exercice 1

Prouvons que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{2x+1} = +\infty}$

On va majorer $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$ par un terme simple $g(x)$ dont il sera facile d'établir qu'il dépasse n'importe quel plafond $B > 0$ fixé si x est assez grand (on peut donc déjà supposer $x > 1$).

<u>Fixons $B > 0$</u>. $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1} \geq \dfrac{x^2-1}{2x+2} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)} = \dfrac{x-1}{2}$.

On pose $g(x) = \dfrac{x-1}{2}$. Mais alors $g(x) > B \iff x > 1 + 2B$.

On pose <u>$A = 1 + 2B$</u>. Si $x > A$, alors $g(x) = \dfrac{x-1}{2} > B$ et donc $f(x) \geq g(x) > B$.

D'où le résultat.

Mise en œuvre théorique (destination L1 / Maths sup)

Correction de l'exercice 5

Prouvons que $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{4x^2}{x-1}\right) = +\infty}$.

Analyse : x étant destiné à tendre vers $+\infty$, on peut supposer $x > 1$.

Ainsi $\frac{4x^2}{x-1} \geq \frac{4x^2-4}{x-1} = \frac{4(x^2-1)}{x-1} = 4(x+1) > 4x$ (1).

Synthèse :Fixons $B > 0$ et posons $g(x) = \ln(4x)$.

$g(x) > B \iff 4x > e^B \iff x > \frac{e^B}{4}$. On pose $A = \max\left(1, \frac{e^B}{4}\right)$. Si $x > A$, alors $g(x) > B$. Or par (1) et la stricte croissance de ln sur $]0; +\infty[$, $\ln\left(\frac{4x^2}{x-1}\right) > g(x) > B$.

D'où le résultat.

Exemples classiques à connaître

1. $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $\lim_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty \text{ si k pair} \\ -\infty \text{ si k impair} \end{cases}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
3. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
4. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
5. Un théorème de croissance comparée : $(\forall k \in \mathbb{N})$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty$
6. Un théorème de croissance comparée : $(\forall k \in \mathbb{N}^*)$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^k}{\ln x} = +\infty$

Théorèmes de comparaison quand x tend vers $\pm\infty$

Prouver théoriquement que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ est souvent technique et peut s'avérer difficile. Heureusement, il existe des outils très efficaces !

Deux théorèmes de comparaison (existence de limites infinies)

Soient f et g deux fonctions définies toutes deux au voisinage de $-\infty$ ou de $+\infty$.

1. Si pour x assez grand (positif ou négatif), $g(x) \leq f(x)$ et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$
   Si la plus petite des deux fonctions tend vers $+\infty$, alors la plus grande des deux fonctions tend vers $+\infty$.
2. Si pour x assez grand (positif ou négatif), $f(x) \leq g(x)$ et que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$
   Si la plus grande des deux fonctions tend vers $-\infty$, alors la plus petite des deux fonctions tend vers $-\infty$.

Théorèmes de comparaison quand x tend vers $\pm\infty$

Un cas pratique pour majorer ou minorer des fonctions

Il s'agit d'utiliser la **convexité** ou la **concavité** de f sur un intervalle I de la forme $]-\infty; a[$ ou $]a; +\infty[$.

Définition et propriété : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. f est convexe (resp. concave) si C_f est en-dessous (resp. au-dessus de chacune de ses cordes).
2. Si de plus f est dérivable sur I, f est convexe (resp. concave) si et seulement si C_f est au-dessus (resp. en-dessous) de chacune de ses tangentes.
3. Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe (resp. concave) si pour tout réel x intérieur à I, $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$).

Théorèmes de comparaison quand x tend vers $\pm\infty$

Un cas pratique pour majorer ou minorer des fonctions

Il s'agit d'utiliser la **convexité** ou la **concavité** de f sur un intervalle I de la forme $]-\infty; a[$ ou $]a; +\infty[$.

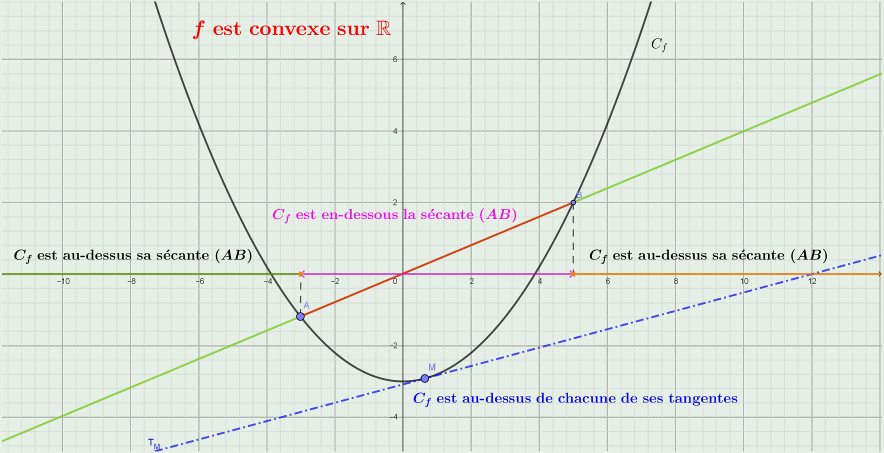
Définition et propriété : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. f est convexe (resp. concave) si C_f est en-dessous (resp. au-dessus de chacune de ses cordes).
2. Si de plus f est dérivable sur I, f est convexe (resp. concave) si et seulement si C_f est au-dessus (resp. en-dessous) de chacune de ses tangentes.
3. Si f est deux fois dérivable sur I, f est convexe (resp. concave) si pour tout réel x intérieur à I, $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$).

Or si l'on arrive à majorer ou minorer une fonction f par une fonction affine (non constante), l'application des théorèmes précédents sera immédiate !

Théorèmes de comparaison quand x tend vers $\pm\infty$

Propriétes d'une fonction convexe



Nous en verrons des applications en exercice.

Théorèmes de comparaison quand x tend vers $\pm\infty$

Pour en finir provisoirement avec la définition de limite infinie d'une fonction f lorsque x tend vers l'infini, **ne paniquez pas !**

Les illustrations précédentes démontrées théoriquement, en revenant à la définition, ne seront *jamais* appliquées telles quelles au bac. Le diaporama "Pratique de calcul des limites" que vous avez déjà testé sans le savoir dès le début du cours sur nombre d'exemples et en exercices, sera votre modèle.

Et tous les exercices du bac seront guidés. Il vous suffira donc d'appliquer les résultats du cours à bon escient en faisant preuve de rigueur !

Ce diaporama est théorique et destiné à celles et ceux qui souhaitent poursuivre des études à dominante mathématique. Ne pas tout saisir ne vous empêchera absolument pas de réussir brillamment votre bac !
Considérez-le comme un bonus.
Bon travail !