Fonctions usuelles

Valeur absolue

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 29, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

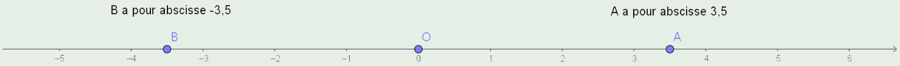
Plan du cours

Valeur absolue : une introduction

Nous supposons connue du lecteur la notion de droite réelle : l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est représenté par une droite graduée. Chaque réel x est repéré par son **abscisse** X (positive ou négative) sur cette droite.

Posons momentanément $d(0,x)$ la distance entre l'origine et un réel x quelconque : OX = d(0,x).

distance à l'origine



Dans le cas présent : $OA = d(0, x_A) = 3,5$ et $OB = d(O, x_B) = 3,5$ aussi.

Plus généralement : $d(0,x) = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$

En particulier, $d(0,x) = d(x,0) = d(0,-x)$.

Valeur absolue : une introduction

distance entre deux réels

La distance AB entre deux réels d'abscisses respectives a et b est par définition $d(0, b-a)$.

Ainsi, $AB = d(a,b) = \begin{cases} a-b \text{ si } a \geq b \\ b-a \text{ si } a \leq b \end{cases}$

Bref la distance entre deux réels d'abscisse a et b est égale à : $\max(a,b) - \min(a,b)$: "le plus grand moins le plus petit".

Deux exemples

Un dessin est conseillé dans chacun des cas.

1. $d(2,6) = 6-2 = 4$
2. $d(-2,4) = 4-(-2) = 4+2 = 6$
3. $d(-1,-5) = -1-(-5) = -1+5 = 4$

Valeur absolue : définition

Nous allons abandonner la notation $d(0, x)$ désignant la distance entre 0 et le réel x au profit d'une nouvelle notation.

Définition de la valeur absolue

Soit x un réel. On appelle **valeur absolue** de x, et on note $|x|$ le réel :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

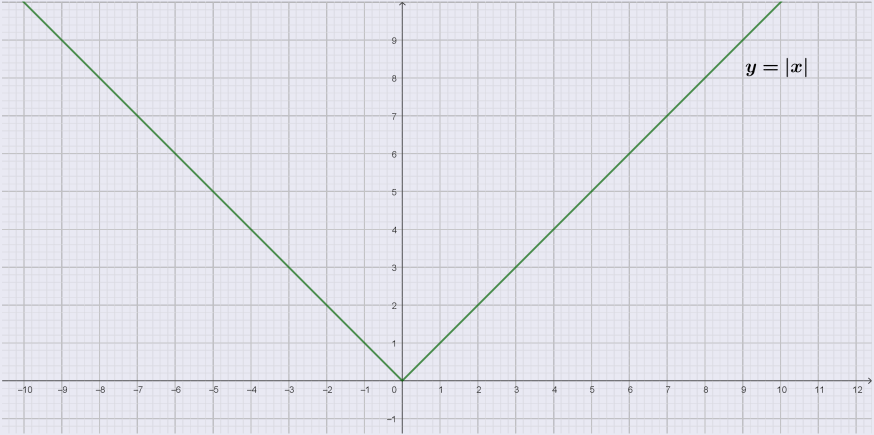
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x \rvert$		$-x$	0	x	

Remarque : $|x| = \max\{x; -x\}$

Valeur absolue : propriétés et applications

Courbe représentative

C'est une **fonction affine par morceaux**.



Valeur absolue : propriétés et applications

Propriétés fondamentales

Soient x, a et b des réels.

1. Pour tout réel x, $|x| \geq 0$
2. Pour tout réel x : $|x| = |-x|$.
3. $|x| = 0 \iff x = 0$
4. Pour tous réels a et b : $|a.b| = |a|.|b|$ (avec les produits tout va bien)
5. $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ (avec les quotients aussi). Bien sûr $b \neq 0$!
6. $|a+b| \leq |a| + |b|$ Mais attention aux sommes ! (**Inégalité triangulaire**)
   Nous avons égalité si et seulement si a et b sont de même signe.

Valeur absolue : propriétés et applications

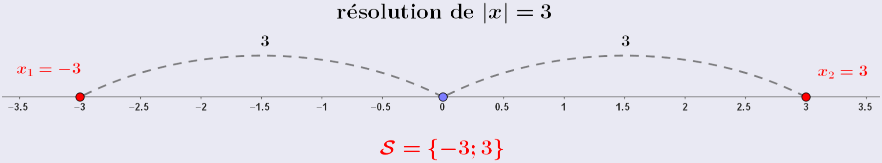
Résolution d'équations (1)

Soit k un réel. Considérons l'équation $\boxed{(E)\ :\ |x| = k}$

1. Si $k < 0$, alors (E) n'a pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$
2. Si $k = 0$, alors (E) a une unique solution : $\mathcal{S} = \{0\}$
3. Si $k > 0$, alors (E) a deux solutions : $\mathcal{S} = \{-k; k\}$

Interprétation géométrique

Si $k > 0$, alors $|x| = k \iff x = k$ ou $x = -k$.



Exercices

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x| = 10$
2. $|x| = -1$
3. $|x+3| = 5$ (la résoudre aussi géométriquement)
4. $|2x-5| = 0$
5. $|2x-5| = 4$
6. $|3x+4| = 9$
7. $|-5x+2| = 4$

Résolution d'équations (2)

Théorème 1 : Soient a un réel. Alors : $|x| = |a| \iff x = a$ ou $x = -a$.

Théorème 2 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $\sqrt{x^2} = |x|$

Un exemple plus croustillant !

Nous souhaitons résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $|3x+1|+|x-6|=10$.

Le problème vient de la présence des valeurs absolues. Il serait souhaitable de pouvoir réécrire (E) sans leur présence.
Bonne nouvelle : c'est possible ! Mais il faudra être rigoureux : plusieurs cas seront à distinguer.

Étape 1 : Par définition de la valeur absolue :

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 \text{ si } 3x+1 \geq 0 \\ -3x-1 \text{ si } 3x+1 \leq 0 \end{cases}$$ c'est-à-dire :

$$|3x+1| = \begin{cases} 3x+1 \text{ si } x \geq -\dfrac{1}{3} \\ -3x-1 \text{ si } x \leq -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Un exemple plus croustillant !

De la même manière :

$$|x-6| = \begin{cases} x-6 \text{ si } x \geq 6 \\ -x+6 \text{ si } x \leq 6 \end{cases}$$

Étape 2 : On réécrit $|3x+1|+|x-6|$ sans les barres de valeur absolue.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		6		$+\infty$
$\lvert 3x+1\rvert$		$-3x-1$	0	$3x+1$		$3x+1$	
$\lvert x-6\rvert$		$-x+6$		$-x+6$	0	$x-6$	
$\lvert 3x+1\rvert + \lvert x-6\rvert$		$-4x+5$		$2x+7$		$4x-5$	

Un exemple plus croustillant !

Étape 3 : on résout enfin l'équation.

1. Sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{3}\right]$: $-4x+5=10 \iff x=-\dfrac{5}{4}$.
2. Sur $\left]-\dfrac{1}{3}; 6\right]$: $2x+7=10 \iff x=\dfrac{3}{2}$.
3. Sur $]6;+\infty[$: $4x-5=10 \iff x=\dfrac{15}{4}$. Mais $\dfrac{15}{4} \notin [6;+\infty[$.

Conclusion : $\mathcal{S}=\{-\dfrac{5}{4}; \dfrac{3}{2}\}$

Valeur absolue : propriétés et applications

Résolution d'inéquations

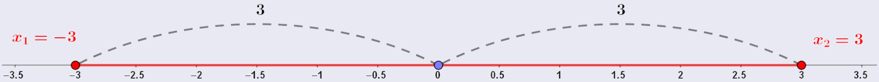
Soit k un réel strictement positif.

1. $|x| \leq k$ a pour solutions : $\mathcal{S} = [-k; k]$
2. $|x| \geq k$ a pour solutions : $\mathcal{S} =]-\infty; -k] \cup [k; +\infty[$

Interprétation géométrique

$$\text{Si } k > 0, \text{ alors } |x| \leq k \iff x \in [-k; k].$$

résolution de $|x| \leq 3$



$\mathcal{S} = [-3; 3]$

Exercices

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $|x| \leq 10$
2. $|x| \geq -1$
3. $|x+2| \leq 4$ (la résoudre aussi géométriquement)
4. $|2x-5| > 4$
5. $|3x+4| \geq 9$
6. $|-5x+2| \leq 4$
7. $|-2x-5| > 10$