# Raisonnements mathématiques : épisode 2

## Les bases de la logique

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 22, 2024

# Les sentiers mathématiques : seconde randonnée

# Quantificateurs

**Introduction** : En français, *quantifier* signifie *attribuer une quantité* à quelqu'un, quelque chose ...
En statistiques vous avez déjà rencontré des variables quantitatives, i.e auxquelles on peut associer un nombre : la taille d'un individu, d'un arbre, la masse d'un objet, etc.

# Quantificateurs

**Introduction** : En français, *quantifier* signifie *attribuer une quantité* à quelqu'un, quelque chose . . .
En statistiques vous avez déjà rencontré des variables quantitatives, i.e auxquelles on peut associer un nombre : la taille d'un individu, d'un arbre, la masse d'un objet, etc.

Nous allons définir ici la notion de **quantificateurs** en mathématiques qui traduira les phrases du type :

1. **Pour tout élément** $x$ appartenant à un certain ensemble $E$, on la propriété $\mathcal{P}(x)$.
2. **Il existe (au moins) un élément** $x$ appartenant à un certain ensemble $E$ **tel que** : $\mathcal{P}(x)$.

# Quantificateurs

## Vocabulaire

1. **Quantificateur universel** $\forall$ : La proposition $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **tout** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si au moins un objet n'a pas la propriété $\mathcal{P}$.
2. **Quantificateur existentiel** $\exists$ : La proposition $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **au moins un** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si aucun un objet n'a la propriété $\mathcal{P}$.

# Quantificateurs

## Vocabulaire

1. **Quantificateur universel** $\forall$ : La proposition $\forall x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **tout** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si au moins un objet n'a pas la propriété $\mathcal{P}$.
2. **Quantificateur existentiel** $\exists$ : La proposition $\exists x,\ \mathcal{P}(x)$ est vraie si **au moins un** objet mathématique a la propriété $\mathcal{P}$ et fausse sinon, i.e si aucun un objet n'a la propriété $\mathcal{P}$.

**Remarques** : En pratique, on verra souvent :

1. $\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$, où $E$ est un ensemble, ce qui résume en fait : $\forall x,\ (x \in E \implies \mathcal{P}(x))$ et signifie que tout élément de $E$ a la propriété $\mathcal{P}$.
2. $\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$, où $E$ est un ensemble, ce qui résume en fait : $\exists x,\ (x \in E \text{ et } \mathcal{P}(x))$ et signifie qu'au moins un élément de $E$ a la propriété $\mathcal{P}$.

# Quantificateurs

## Un exemple de traduction Français / Mathématiques

**Suites arithmétiques** : on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est une suite arithmétique s'il existe un réel $r$ tel que pour tout entier naturel $n$ : $\underline{u_{n+1} - u_n = r}$.

La propriété $\mathcal{P}$ dépend ici de l'entier $n$ et l'on note $\mathcal{P}(n)$ : $u_{n+1} - u_n = r$.

Nous traduirons donc le fait qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est une suite arithmétique par : $(\exists r \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}), \underline{u_{n+1} - u_n = r}$.

Remarque fondamentale : Ce réel $r$ **ne dépend pas** de l'entier $n$. C'est le même $r$ que $n$ vaille 0, 1, 1000, etc.

## Mise en garde sur l'inversion des quantificateurs

On ne peut PAS inverser les quantificateurs dans l'exemple précédent sans changer complètement le sens ! Dans ce cas, $r$ dépendrait de $n$.

# Quantificateurs

## Propriétés des quantificateurs

1. **Inversion** : On peut inverser des quantificateurs universels ou existentiels *qui se suivent* :
   - $\forall x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
   - $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
2. **Implication** :
   $\exists x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \implies \forall x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$, avec réciproque fausse.
3. **Négation** :
   - $\neg(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\exists x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$
   - $\neg(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\forall x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$

## Propriétés des quantificateurs

1. **Inversion** : On peut inverser des quantificateurs universels ou existentiels *qui se suivent* :
   - $\forall x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \forall y \in F, \forall x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
   - $\exists x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \equiv \exists y \in F, \exists x \in E,\ \mathcal{P}(x,y)$.
2. **Implication** :
   $\exists x \in E, \forall y \in F,\ \mathcal{P}(x,y) \implies \forall x \in E, \exists y \in F,\ \mathcal{P}(x,y)$, avec réciproque fausse.
3. **Négation** :
   - $\neg(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\exists x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$
   - $\neg(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)) \equiv (\forall x \in E,\ \neg\mathcal{P}(x))$

**Remarque** : On retrouve dans la négation d'une propriété vraie pour tous les $x$ appartenant à un ensemble $E$ la définition du quantificateur universel. Relisez-la bien ! Idem avec le quantificateur existentiel.

# Quantificateurs

## Exemple 1

**Traduire en français** les propositions qui suivent et préciser leur véracité. Si la proposition est fausse, donner un contre-exemple ou une justification précise.

1. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{N},\ x < y^2$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ n = x + y$

## Exemple 2 (à comprendre également graphiquement)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et $\ell$ un réel.
**Traduire à l'aide de quantificateurs** la proposition suivante :
Pour tout réel strictement positif $\epsilon$, il existe un entier naturel $N$ tel que pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à $N$, $|u_n - \ell| < \epsilon$.

# Quantificateurs

## Exemple 3

Nier les propositions $\mathcal{P}$ qui suivent à l'aide des quantificateurs, puis traduire en français la proposition $\neg\mathcal{P}$.

1. $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R},\ x > 2 \implies x \geq 3$
2. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P} : \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
3. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$. $\mathcal{P} : \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$
4. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \implies f(x) < f(y)$
5. $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z},\ x = p^2 + q^2$
6. Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
   $\mathcal{P} : \exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ f(x + T) = f(x)$.
7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.
   $\mathcal{P} : \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \implies u_{n+1} \leq u_n$.