Raisonnements mathématiques : épisode 1

Les bases de la logique

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 22, 2024

Les sentiers mathématiques

Sommaire

1. Fondamentaux
2. Raisonnement direct et par équivalence
3. Raisonnement par récurrence
4. Raisonnement par l'absurde
5. Raisonnement par contraposée
6. Raisonnement par analyse-synthèse

1. Fondamentaux

La *logique propositionnelle* est l'étude des formules abstraites que nous pouvons écrire à partir d'un certain nombre de variables propositionnelles, représentées par des lettres. Nous nous contenterons d'une définition assez vague, l'objet n'étant pas l'étude de la logique formelle, mais une bonne structuration de la pensée et de la démarche scientifique.

Constantes, variables et propositions

1. Une **constante** est un signe ayant une valeur précise et immuable ; par exemple 1, 2, π, une personne en particulier.
2. Une **variable** est un signe pouvant prendre différentes valeurs dans un certain ensemble ou n'ayant pas de valeur prédéfinie ; par exemple : x solution de $x^2 = 5$, une personne prise au hasard dans le lycée.
3. Une **proposition** est une phrase $\mathcal{P}$ pour laquelle on peut décider si son contenu est réalisé ou non ; par exemple "3 est un entier" est une proposition, mais "Donne-moi l'heure" n'en n'est pas une.

Connecteurs logiques et tables de vérité

Les connecteurs logiques sont des mots ou symboles permettant, à partir de propositions existantes, de définir de nouvelles propositions. Nous distinguons trois connecteurs logiques fondamentaux à partir desquels nous pouvons définir d'autres connecteurs plus complexes.

1. La **négation**, notée symboliquement $\neg$: la proposition $\neg\mathcal{P}$ est vraie si la proposition $\mathcal{P}$ est fausse, et la proposition $\mathcal{P}$ est vraie si la proposition $\neg\mathcal{P}$ est fausse. On résume ceci dans une table de vérité :

$\mathcal{P}$	$\neg\mathcal{P}$
V	F
F	V

Table: Table de vérité du connecteur $\neg$

Connecteurs logiques et tables de vérité

Le second et troisièmes connecteurs logiques sont :

2. la **conjonction** "et", notée $\wedge$,
3. la **disjonction inclusive** "ou", notée $\vee$

Leurs tables de vérité sont données ci-dessous :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Table: Tables de vérité des connecteurs $\wedge$ et $\vee$

Principe de non contradiction : Aucune proposition n'est à la fois vraie et fausse.

Propriétés usuelles

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors :

1. $\neg(\neg\mathcal{P})$ et $\mathcal{P}$ sont identiques.
2. $\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$ sont identiques.
3. $\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ et $\neg\mathcal{P} \vee \neg\mathcal{Q}$ sont identiques.

Nous noterons $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ pour dire que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont identiques.

1. Fondamentaux

Définissons les propositions $\mathcal{P}$: "J'ai joué" et $\mathcal{Q}$: "J'ai gagné". Avoir tenté sa chance, c'est bien avoir joué ... Seulement, le fait d'avoir joué n'implique pas nécessairement de gagner.

On peut donc **nier** le fait que "**jouer implique gagner**" par : "j'ai joué **et** j'ai perdu", soit : $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$. Or $\neg(\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}) \equiv \neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, d'où la :

Définition de l'implication

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. La proposition $\mathcal{P}$ **implique** $\mathcal{Q}$, que l'on note par $\boxed{\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}}$ est exactement la proposition $\boxed{\neg\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$	$\neg(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Remarques importantes

1. Si $\mathcal{P}$ est fausse, la proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est toujours vraie.
2. En particulier, la flèche $\implies$ n'est pas synonyme de "donc", qui sous-entend que ce qui précède est vrai.
3. **Pour prouver que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vraie, on supposera donc $\mathcal{P}$ vraie, puis on aboutira à la conclusion que $\mathcal{Q}$ est vraie.**

Résumé

Retenez donc bien que l'implication $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est une proposition, alors que la phrase "$\mathcal{P}$ est vraie, donc $\mathcal{Q}$ est vraie" est un **RAISONNEMENT**, i.e un enchevêtrement complexe de propositions :
(($\mathcal{P}$ est vraie) **ET** ($\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$) est vraie), **DONC** $\mathcal{Q}$ est vraie.

2. Raisonnement direct et par équivalence

Principe du raisonnement direct

Notre but est donc de prouver que si une certaine proposition $\mathcal{P}$ est vraie, alors une autre proposition $\mathcal{Q}$ est vraie aussi.

Mise en œuvre

Nous supposons $\mathcal{P}$ vraie, et par une suite d'arguments logiques, nous arrivons à la conclusion que $\mathcal{Q}$ est également vraie.

Vocabulaire

1. La proposition $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ est la **réciproque** de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
2. $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** à $\mathcal{Q}$: $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.
3. $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire** à $\mathcal{Q}$: $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$.

2. Raisonnement direct et par équivalence

Exemple 1

Soient $\mathcal{P}\ :\ x \geq 1$ et $\mathcal{Q}\ :\ x^2 \geq 1$.

Rappelons que la fonction carrée $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

1. Est-ce que $\mathcal{P}$ vraie implique $\mathcal{Q}$ vraie ?
2. La **réciproque** est-elle vraie ?

Exemple 1 : solution

1. Supposons donc $\mathcal{P}$ vraie : on se donne un réel x quelconque tel que $x \geq 1$. En particulier, $x \geq 0$.

   Or $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $x^2 \geq 1^2$ i.e $x^2 \geq 1$.

   Nous en déduisons que $\mathcal{Q}$ est vraie.

2. La réciproque est **FAUSSE** : Par exemple, en choisissant $x = -2$, on a bien $x^2 = 4 \geq 1$ mais $x < 1$.

Remarque : si $k > 0$, $x^2 \geq k \iff x \in]-\infty; \sqrt{k}] \cup [\sqrt{k}; +\infty[$.

Exemple 2

Prouvez directement que pour tout réel $x \in [3;8]$, on a :

$$\frac{-2}{\sqrt{x+1}} \in \left[-1; -\frac{2}{3}\right]$$

Exemple 2 : solution

Soit $x \in [3;8]$ i.e $3 \leq x \leq 8$. Alors $4 \leq x+1 \leq 9$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$ (donc sur $[4;9]$), nous avons : $2 \leq \sqrt{x+1} \leq 3$.

Par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$ (donc sur $[2;3]$), on en déduit que : $\dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \geq \dfrac{1}{3}$.

Nous multiplions par le réel $-2 < 0$ chaque membre de l'inégalité, d'où :

$$-1 \leq \frac{-2}{\sqrt{x+1}} \leq -\frac{2}{3}$$

i.e

$$\frac{-2}{\sqrt{x+1}} \in \left[-1; -\frac{2}{3}\right]$$

2. Raisonnement direct et par équivalence

Principe du raisonnement par équivalence

Deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont dites **équivalentes** si $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et si $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$. On note $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$.

Mise en œuvre

Deux procédés sont possibles :

1. On suppose $\mathcal{P}$ vraie et on prouve que $\mathcal{Q}$ vraie.
   Réciproquement, on suppose $\mathcal{Q}$ vraie et on prouve que $\mathcal{P}$ vraie.
2. On raisonne directement par équivalence en changeant $\mathcal{P}$ en $\mathcal{Q}$:
   $\mathcal{P} \iff \cdots \iff \mathcal{Q}$.
   ATTENTION, une équivalence vous engage dans les deux sens.

Le raisonnement par équivalence est souvent utilisé dans la résolution d'équations / d'inéquations.

Exemple et contre-exemple

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A-t-on $a = b$ et $c = d \iff a + c \leq b + d$?

Exemple et contre-exemple : solution

1. ($\Longrightarrow$) : soient $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que $x^2 + y^2 = 0$. Alors : $0 \leq x^2 = -y^2 \leq 0$, d'où $x^2 = y^2 = 0$ et partant, $x = y = 0$.
   ($\Longleftarrow$) Réciproquement, si $x = y = 0$, on a clairement $x^2 + y^2 = 0$.
2. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. A-t-on $a = b$ et $c = d \iff a + c \leq b + d$?
   Nous avons juste l'implication évidente
   $a = b$ et $c = d \implies a + c \leq b + d$. La réciproque est fausse.
   Par exemple $1 + 3 = 2 + 2$, mais $1 \neq 2$ et $2 \neq 3$.

Principe du raisonnement par récurrence

Notre but est de prouver qu'une certaine proposition $\mathcal{P}_n$ dépendant de l'entier naturel n est vraie pour tous les entiers n.

Mise en œuvre (récurrence simple)

1. Nous énonçons précisément la proposition $\mathcal{P}_n$
2. **Initialisation** : nous prouvons que $\mathcal{P}_0$ est vraie.
3. **Hérédité** : Nous nous donnons un entier naturel n quelconque et supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Nous prouvons alors, par une suite d'arguments logiques que $\mathcal{P}_{n+1}$ est également vraie.
4. **Conclusion** : La proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

Premières remarques

1. L'initialisation est aussi importante que l'hérédité ! Si on vous donne le droit de passer d'un barreau d'une échelle à un autre, mais pas le droit de poser le pied sur le premier barreau, vous ne pourrez jamais la gravir !
2. L'initialisation ne s'effectue pas toujours à $n = 0$ mais à partir d'un certain rang $n_0 \geq 1$.
3. Enfin, **erreur fatale** : Ne partez pas du résultat à prouver !
   La phrase : "Supposons que pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n$ est vraie", est une hérésie !!!

Exemple 1

Prouver que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple 1 : solution

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. **Initialisation** : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
3. **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$
   D'où : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
4. **Conclusion** : $\mathcal{P}_1$ est vraie et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$.
   Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple 2

Prouver que pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exemple 2 : solution

1. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n : \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. **Initialisation** : $\left(\dfrac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = 1^3$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
3. **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\mathcal{P}_n}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$. D'où :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2\frac{n^2+4n+4}{4} =$
$\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

4. Raisonnement par l'absurde

Principe du raisonnement par l'absurde

Nous souhaitons montrer qu'une certaine proposition $\mathcal{P}$ est vraie.

Supposons le contraire : $\mathcal{P}$ fausse. Puis, par une succession d'arguments logiques, nous arrivons à une contradiction. Par exemple que $\mathcal{P}$ soit vraie.

Dans le cas d'une implication :
le raisonnement par l'absurde consiste à nier $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, soit considérer sa négation : $\mathcal{P} \wedge \neg\mathcal{Q}$.

Ainsi, **supposant $\mathcal{P}$ vraie et $\mathcal{Q}$ fausse, nous arrivons à une contradiction**.

4. Raisonnement par l'absurde

Exemple

1. Soit n un entier naturel. Prouvez par l'absurde que si n^2 est pair, alors n est également pair.
2. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est l'ensemble des nombres qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

   Prouvez par l'absurde que $x = \sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

   Indication : Vous pourrez vous servir du fait que toute fraction possède un représentant irréductible.

4. Raisonnement par l'absurde

Exemple : solution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons par l'absurde que n^2 soit pair **et** n impair. Or n impair signifie qu'il existe un entier naturel p tel que $n = 2p + 1$. En élevant au carré : $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$, donc n^2 impair. Or nous avons supposé n^2 pair. Contradiction !
2. Posons $x = \sqrt{2}$ et supposons par l'absurde que x soit rationnel. Comme $x > 0$, il existe deux entiers naturels p et q strictement positifs tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$, fraction que l'on supposera **irréductible**.

   En élevant chaque membre au carré nous obtenons que $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$, d'où $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc d'après (1) p est pair. Mais alors il existe $p' \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = 2p'$, et partant $p^2 = 4p'^2 = 2q^2$. D'où $q^2 = 2p'^2$ i.e q^2 pair. Mais alors q est pair : 2 divise donc p et q, ce qui **contredit** le fait que la fraction p/q soit irréductible.

5. Raisonnement par contraposée

Principe du raisonnement par contraposition

Notre but est encore de prouver que si une certaine proposition $\mathcal{P}$ est vraie, alors une autre proposition $\mathcal{Q}$ est vraie aussi.

Pour ceci, nous remarquons que les propositions $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ et $\neg\mathcal{Q} \implies \neg\mathcal{P}$ ont même table de vérité, autrement dit sont équivalentes.

La proposition $\neg\mathcal{Q} \implies \neg\mathcal{P}$ s'appelle la **contraposée** de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$. Ne pas confondre avec la proposition $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ qui est la **réciproque** de $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$.

Mise en œuvre

Nous supposons $\mathcal{Q}$ fausse et prouvons que $\mathcal{P}$ est fausse également.

5. Raisonnement par contraposée

Remarque

Le raisonnement par contraposée (dit aussi raisonnement par contraposition) ressemble beaucoup au raisonnement par l'absurde au premier abord.
Et pourtant, ce ne sont pas les mêmes !

Lequel utiliseriez-vous pour prouver que si n est un entier, alors $\sqrt{n^2+2}$ n'en est pas un ?

Principe du raisonnement par analyse-synthèse

Nous utilisons souvent ce raisonnement lorsque nous cherchons à déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E satisfaisant une certaine propriété $\mathcal{P}$.

Mise en œuvre

1. **Analyse** : on se donne un élément x de E vérifiant la propriété $\mathcal{P}$ et on essaie de voir à quoi peut ressembler x. On trouve un certain sous-ensemble $\mathcal{A}$ de E.
2. **Synthèse** : On se donne un élément x quelconque de $\mathcal{A}$ et on vérifie que x vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent utilisé pour démontrer les propositions du type : "il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$".

Exemple 1

Prouver que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

6. Raisonnement par analyse-synthèse

Exemple 1 : solution

Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions f s'écrivant comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

1. **Analyse** : Soit f une fonction vérifiant la propriété annoncée.
   Pour tout réel x, $f(x) = g(x) + h(x)$, où g est paire et h est impaire.
   Ainsi $f(-x) = g(-x) + h(-x) = g(x) - h(x)$.
   D'où $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
2. **Synthèse** : Donnons-nous une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
   Posons $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.
   Par construction, $f(x) = g(x) + h(x)$.
   Puis $g(-x) = g(x)$ donc g est paire, et $h(-x) = -h(x)$, donc h est impaire.

Exemple 2

Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait :

$$f(y - f(x)) = x - y + 1$$

Exemple 2 : solution

Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble des fonctions f vérifiant la propriété annoncée.

1. **Analyse** : Pour tout réel x, si l'on choisit $y = f(x)$, nous obtenons que $f(0) = x - f(x) + 1$, et donc $f(x) = x - f(0) + 1$.
   Ainsi f est de la forme $f(x) = x + k$, où k est une certaine constante réelle. En particulier, $f(0) = k$.
2. **Synthèse** : Donnons-nous une fonction f de la forme déterminée précédemment. Alors : $f(y - x - k) = x - y + 1$.
   Choisissant $y = x + k$, nous obtenons :
   $k = f(0) = x - x - k + 1 = -k + 1$, d'où $k = \dfrac{1}{2}$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{1}{2}$.