1

Dénombrement

Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard   Classe : Terminale spé maths   Année : 2024-2025

Opérations ensemblistes - cardinal d'un ensemble

Rappel de cours : Nous considérerons uniquement des ensembles ayant un nombre fini d'éléments. On appelle *cardinal* de l'ensemble E le nombre de ses éléments. L'*ensemble vide*, noté $\emptyset$ est l'unique ensemble ne contenant aucun élément. Son cardinal est égal à 0.
On notera $|E|$ ou card(E) le cardinal de l'ensemble E.
Dans toute la suite, A et B désigneront des sous-ensembles (appelées aussi parties) d'un ensemble de référence E. On notera $\bar{A}$ ou $E \setminus A$ le *complémentaire* de A dans E, i.e l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

1. $|A| \leq |E|$ avec égalité si et seulement si $A = E$.
2. $|\bar{A}| = |E| - |A|$. En particulier, si A et B sont deux sous-ensembles de E tels que $A \subset B$, alors $|A| \leq |B|$. Plus précisément : $|B| = |A| + |B \setminus A|$.
3. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
4. On dit que A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$. Dans ce cas, $|A \cup B| = |A| + |B|$.
5. Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une *partition* de l'ensemble E si :
   - Chacune des parties A_i, $(1 \leq i \leq n)$ est non vide
   - $E = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$
   - Les A_i sont deux à deux disjoints : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$

   Alors $|E| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i|$

Exercice n°1

1. Dans une classe de 36 élèves de terminale, il est proposé deux activités sportives le mercredi après-midi à des horaires qui se suivent : la course d'orientation et le ping-pong. 5 élèves ne font aucune activité, 20 élèves ont choisi la course d'orientation et 6 élèves pratiquent les deux activités. Combien d'élèves pratiquent uniquemrent le ping-pong ?
2. On a interrogé 40 élèves qui ont répondu par oui ou par non (pas d'abstention) aux deux questions suivantes :
   Question 1) Aimez-vous la lecture ?
   Question 2) Aimez-vous le sport ?
   20 élèves ont répondu oui à la question 1 et 26 élèves ont répondu oui à la question 2. On a par ailleurs 8 élèves n'aimant ni le sport, ni la lecture.
   (a) Déterminez le nombre d'élèves aimant à la fois le sport et la lecture.
   (b) Déterminez le nombre d'élèves n'aimant que le sport.

Exercice n°2

Dans un lycée, 115 élèves de Terminale étudient au moins une des trois langues : Anglais, Allemand, Espagnol ; 8 d'entre eux étudient les trois langues. De plus, l'Espagnol ne peut être choisi que comme seconde langue ; 2 étudient l'Allemand et l'Espagnol, mais pas l'Anglais. Il y a 101 élèves qui étudient l'Anglais, 52 qui étudient l'Allemand et 50 qui étudient l'Espagnol. Déterminez le nombre d'élèves qui étudient :

1. l'Anglais et l'Espagnol, mais pas l'Allemand,
2. l'Anglais et l'Allemand, mais pas l'espagnol,
3. l'Anglais seulement,
4. l'Allemand seulement.

Les principes additifs et multiplicatif

Rappels de cours : Dans ce qui suit, le "**OU**" que nous considérerons est un "OU exclusif", au contraire du "OU" habituel en mathématiques qui est inclusif. Par exemple, en probabilités, si A et B désignent deux événements, l'événement $A \cup B$ qui signifie "A est réalisé OU B est réalisé", n'empêche pas la réalisation simultanée de A et de B : $A \cap B$, pourvu que A et B ne soient pas incompatibles i.e $A \cap B = \emptyset$. Les deux grands principes à retenir sont les suivants :

1. **Principe multiplicatif** : Quand on doit faire un choix, puis un autre, puis un autre, etc. les possibilités se multiplient.
2. **Principe additif** : Quand on doit faire un choix OU (exclusif) un autre OU un autre, etc. les possibilités s'additionnent.

Un arbre permet de visualiser correctement ces deux situations.

Exercice n°3

Monsieur T. a dans son rangement 6 paires de chaussettes assorties, 5 caleçons, 3 pantalons, 4 chemises et 2 cravates. Combien de tenues différentes peut-il constituer ?

Exercice n°4

Dans une urne, il y a 21 boules numérotées de 1 à 21. On prélève successivement et sans remise 3 boules de cette urne. Combien de prélèvements contiennent exactement un multiple de 5 et un multiple de 3 ?

Exercice n°5

Madame Méline Vion, une célèbre chanteuse a une manie pendant ses concerts : parmi ses 50 paires de bottes, elle souhaite porter une paire dépareillée. Combien de paires dépareillées peut-elle constituer ?

Exercice n°6

Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On prélève successivement et sans remise une boule de cette urne jusqu'à temps que le contenu de l'urne soit unicolore. Calculez le nombre de tirages différents jusqu'à l'obtention d'un tel contenu.

Exercice n°7

Un restaurant propose un menu à 20€ (menu 1) et un menu à 30€ (menu 2).
Le menu 1 donne accès à 3 entrées, 2 plats principaux (grillade ou plat végétarien) et à 4 desserts (dont le dessert surprise).
Le menu 2 donne accès à 4 entrées, 3 plats principaux (grillade, plat végétarien ou bistronomique) et à 6 desserts (dont le dessert surprise et le dessert du chef).

1. De combien de façons peut-on constituer un menu à 20€ ?
2. De combien de façons peut-on constituer un menu à 30€ ?
3. De combien de façons peut-on constituer un menu à 20€ comprenant une grillade et le dessert surprise ?
4. De combien de façons peut-on constituer un menu à 30€ comprenant le plat bistronomique ?
5. De combien de façons peut-on constituer un menu à 30€ comprenant une grillade et le dessert surprise ?
6. De combien de façons peut-on constituer un menu à 30€ comprenant le dessert surprise ou le dessert du chef ?
7. De combien de façons peut-on constituer un menu à 30€ comprenant une grillade ou un plat végétarien ?

p-lites, arrangements et combinaisons

Rappels de cours : On désignera par E un ensemble de cardinal n.

1. **Factorielle** : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \geq 1$, on désigne par $n!$ et on lit *factorielle de* n le nombre $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. Par convention, $0! = 1$.
2. **p-liste (ou p-uplet)** d'éléments de E : C'est une **liste <u>ordonnée</u> de p éléments de E distincts ou non** ; on note une p-liste : $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, et elles sont au nombre de n^p.
3. **Arrangement de p éléments pris parmi n** : C'est une **liste *ordonnée* de p éléments de E tous distincts**. On note A_n^p le nombre de tels arrangements. Si $p > n$, : $A_n^p = 0$ et si $p \leq n$, alors $A_n^p = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$.
4. **permutation** : C'est un arrangement de n éléments de E pris parmi les n éléments de E. On en dénombre $A_n^n = n!$.
5. **Coefficient binomial** : C'est le nombre de parties à p éléments ($p \leq n$) d'un ensemble E en contenant n. On le note $\dbinom{n}{p}$. On a $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Tableau de synthèse : selon la situation, vous serez dans une des cases du tableau.

	Avec répétitions	Sans répétition
L'ordre compte	p-listes	Arrangements
L'ordre ne compte pas	Hors programme	Combinaisons

Exercice n°8

Une urne contient 5 boules rouges numérotées de 1 à 5 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5. Un jeu consiste à extraire 10 fois de suite avec remise une boule de l'urne. On gagne si toutes les boules tirées sont de la même couleur ou si toutes les boules tirées portent le même numéro.

1. Combien existe-t-il de tirages différents ?

2. Combien existe-t-il de tirages gagnants ?

Exercice n°9

Un peu de travail sur l'écriture factorielle.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P_n = 2 \times 4 \times 6 \cdots \times (2n)$ et $Q_n = 1 \times 3 \times 5 \cdots \times (2n+1)$.

1. Déterminez une formule faisant intervenir la notation factorielle et l'entier n pour simplifier l'écriture de P_n.

2. En déduire une formule faisant intervenir la notation factorielle et l'entier n pour simplifier l'écriture de Q_n.

Exercice n°10

On considère onze personnes disposées autour d'une table en U (il y a onze sièges).

1. Combien existe-t-il de dispositions différentes de ces personnes ?

2. Il y a 6 hommes et 5 femmes et on souhaite les alterner. Combien existe-t-il de dispositions différentes ?

3. Même question qu'au 1. si la table est ronde.

Exercice n°11

Combien existe-t-il d'anagrammes différents des mots :

1. RHUM ?

2. MELODIEUSE ?

3. TROTINETTE ?

4. INSECTES ?

5. MALICIEUSEMENT ?

6. CIVILISATIONNEL ?

7. OSTEOPOROSE ?

8. Un mot avec p lettres S et q lettres E $(p, q \in \mathbb{N}^*)$?

9. Un mot avec p lettres S, q lettres E et r lettres O $(p, q, r \in \mathbb{N}^*)$?

10. Un mot de n lettres avec n_1 lettres de type 1, n_2 lettres de type 2, $\ldots n_k$ lettres de type k ?

Exercice n°12

On prélève au hasard et simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On appelle "main" le jeu obtenu, par exemple : le 7 de pique, deux as, un valet et une dame.

1. Combien existe-t-il de mains différentes ?
2. Combien existe-t-il de mains avec 5 trèfles ?
3. Combien existe-t-il de mains avec exactement une dame ?
4. Combien existe-t-il de mains avec aucune dame ?
5. Combien existe-t-il de mains avec au moins deux dames ?
6. Combien existe-t-il de mains avec exactement une dame et deux rois ?
7. Combien existe-t-il de mains avec exactement deux piques et deux trèfles ?

Exercice n°13

On souhaite constituer un mot de passe de 8 caractères parmi : a, b, ..., z, A, B, ..., Z, 0, 1, ..., 9.

1. Combien de mots de passe différents peut-on créer ?
2. Combien de mots de passe différents commençant par une majuscule peut-on créer ?
3. Combien de mots de passe avec des caractères tous distincts peut-on créer ?
4. Combien de mots de passe avec deux chiffres aux troisième et quatrième positions peut-on créer ?

Exercice n°14

Un cirque propose cinq numéros pour composer le spectacle : les chiens savants, l'illusionniste, les clowns, les trapézistes et les jongleurs.

1. Calculez le nombre d'ordres de passage (appelés programmes) des numéros sur la piste.
2. Parmi ces programmes :
   - a) Combien d'entre eux ont le numéro "les clowns" en fin de spectacle ?
   - b) Combien d'entre eux commencent ou se terminent par le numéro "les acrobates" ?
   - c) Combien d'entre eux ont le numéro "les trapézistes" qui suivent immédiatement le numéro "les clowns" ?
   - d) Combien d'entre eux ont le numéro "les clowns" séparé du numéro "les chiens savants" par le numéro "les trapézistes" ?

Exercice n°15

Le jeu de bridge contient 52 cartes. Une main au bridge est constituée de 13 cartes.

1. Quel est le nombre de mains différentes ?
2. Quel est le nombre de mains avec exactement un as ?
3. Quel est le nombre de mains avec exactement 3 as et deux valets ?
4. Quel est le nombre de mains avec aucun as ?
5. Quel est le nombre de mains avec au moins deux dames ?
6. Quel est le nombre de mains avec exactement cinq cœurs ?
7. Quel est le nombre de mains avec au moins trois cœurs ?
8. On appelle "Honneur" un as, un roi, une dame, un valet ou un dix. Combien de mains contiennent exactement trois honneurs ?

Exercice n°16

Une boîte contient 10 cases numérotées de 1 à 10.

1. On considère 3 boules numérotées 1, 2 et 3.
   - a) Calculez le nombre de distributions possibles de ces boules lorsque ces 3 boules occupent 3 cases différentes ? On se placera toujours dans ce cas.
   - b) Calculez le nombre de distributions possibles avec la boule 1 dans la case 1.
   - c) Calculez le nombre de distributions possibles avec 2 boules dans les cases ayant le même numéro qu'elles ?
2. Même question qu'au 1.a. en supposant les boules indiscernables.

Exercice n°17

Formule de Pascal.
Soient n et p deux entiers naturels non nuls avec $n \geq 2$ et $p < n$.

1. **Démonstration 1** : En utilisant l'expression factorielle des coefficients binomiaux, prouvez que $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.
2. **Démonstration 2** : Nous allons raisonner de manière combinatoire. Pour ceci, fixons un élément a quelconque d'un ensemble E de cardinal n.
   - a) Combien existe-t-il de parties de E contenant p éléments ?
   - b) Combien existe-t-il de parties de E à p éléments contenant a ?
   - c) Combien existe-t-il de parties de E à p éléments ne contenant pas a ?
   - Conclure.
3. **Applications** : Triangle de Pascal.
   Soient a et b deux réels. Développez $(1 + x)^5$ et $(1 + x)^6$.

Exercice n°18

Formule de Vandermonde.
Considérons une urne contenant p boules blanches numérotées de 1 à p et q boules noires numérotées de $p+1$ à $p+q$. On prélève simultanément n boules de cette urne.

1. Combien existe-t-il de prélévements distincts ?

2. Pour tout entier k compris entre 0 et n inclus, on note P_k le nombre de prélèvements de n boules dans cette urne, contenant exactement k boules blanches. Calculez P_k.

3. En déduire l'identité de Vandermonde : $\displaystyle\binom{p+q}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

Exercice n°19

Combinaisons avec répétitions.
C'est la case du tableau "Hors Programme". Mais vous allez voir, ce n'est pas si difficile à comprendre.
Pour nous : on emploie des combinaisons quand l'ordre ne compte pas mais que les éléments pris en compte sont tous distincts ! (modèle du tirage simultané)
Alors que des tirages successifs d'éléments distincts avec ou sans répétitions (p-listes et arrangements) font intervenir l'ordre.
Nous allons donc mixer les deux approches.
Considérons le **problème modèle** suivant : On souhaite fabriquer un bouquet de 9 fleurs constitué de marguerites, de tulipes et d'iris. Un bouquet peut être constitué d'un seul type de fleurs. Combien de bouquets différents peut-on constituer (**les fleurs de chacune des catégories sont supposées indiscernables**) ? On se ramène à résoudre l'équation $m+t+i=9$, où m, t, i désignent repectivement le nombre de marguerites, de tulipes et d'iris dans le bouquet. Par exemple, 4 marguerites, 3 tulipes et 2 iris est une solution au problème.
Voici l'ASTUCE de la mort : on remplace les fleurs par des cercles et les + par des barres verticales (n'oubliez pas que toutes les fleurs du même type sont supposées indiscernables) : le bouquet précédent se symbolise alors par : $\circ\circ\circ\circ\,|\,\circ\circ\circ\,|\,\circ\circ$.
Autre exemple : $|\,\circ\circ\circ\circ\circ\circ|\,\circ\circ\circ$ représente un bouquet avec 0 marguerites, 6 tulipes et 3 iris.

1. Justifiez que l'on peut composer 55 bouquets différents (*indication* : on a 11 symboles au total et il suffit de choisir la place des séparateurs —)

2. De manière générale, si l'on dispose de n fleurs identiques de p types distincts, combien de bouquets peut-on composer ?

3. Généralisation : Calculez le nombre de solutions de l'équation (E_k) : $x_1 + \cdots + x_k = n$, où $x_1, \ldots, x_k$ et n sont des entiers naturels.

4. En déduire le nombre de solutions de l'équation (E_k) : $x_1 + \cdots + x_k = n$, où $x_1, \ldots, x_k$ et n sont des entiers naturels non nuls.

Exercice n°20

Le poker.
On tire au hasard et simultanément 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes possède quatre "couleurs" : pique, cœur, carreau, trèfle, chacune d'entre elles constituée de huit "hauteurs" : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. Calculez le nombre de mains de 5 cartes comprenant :

1. Un carré (4 cartes de même hauteur) ?
2. Un brelan (3 cartes de même hauteur) ?
3. Deux paires (2 cartes de même hauteur) distinctes ?
4. Exactement une paire ?
5. Un full (un brelan et une paire) ?