Dimension d'un espace vectoriel

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

5 septembre 2024

Le présent document est entièrement dédié à la notion de **dimension d'un espace vectoriel**. Il ne se base sur aucun programme scolaire en particulier, mais à de rares exceptions près, l'essentiel du propos est de niveau L1. Il ne s'agit donc en aucun cas d'un cours.
Après de brefs rappels sur la définition d'un espace vectoriel, ses sous-structures et ses morphismes, mais avec une vision élargie, nous entrons dans le vif du sujet. Nous ne nous contenterons pas de la dimension finie, même si cette dernière sera largement mise en avant. Nous proposons également des applications en algèbre et en analyse qui peuvent intéresser les candidat(e)s aux agrégations de mathématiques. Un prochain papier sera intégralement consacré à ces applications.

Table des matières

1 Notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et morphismes associés

1.1 $\mathbb{K}$-espace vectoriel, sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Soit $(\mathbb{K},+,\times)$ un corps commutatif et E un ensemble non vide muni d'une loi interne $+$ et une loi externe $.\ :\ \mathbb{K}\times E\to E,\ (\lambda,x)\mapsto\lambda.x$

Nous noterons $\lambda\mu$ plutôt que $\lambda\times\mu$ la multiplication de deux éléments de $\mathbb{K}$.

Définition 1-1-1 : On dit que E est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** si pour tout $(x,y)\in E^2$ et pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$:

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif.
2. (a) λ.(x+y) = λ.x + λ.y
   (b) $(\lambda+\mu)$.x = λ.x + μ.x
   (c) $(\lambda\mu)$.x = λ.(μ.x)
   (d) $1_{\mathbb{K}}$.x = x

Définition 1-1-2 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Ses éléments sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

Exemples :

1. $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque. Alors l'ensemble E^I des familles $(x_i)_{i\in I}$ indexées par I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois :
   — $(x_i)_{i\in I}+(y_i)_{i\in I}=(x_i+y_i)_{i\in I}$
   — $\lambda.(x_i)_{i\in I}=(\lambda x_i)_{i\in I}$
3. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
4. L'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites de scalaires est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
5. L'ensemble $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites de scalaires nulles à partir d'un certain rang est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
6. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
7. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois évidentes.
8. $\mathcal{F}([0;1],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriété 1-1-3 (règles de calcul) : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x,y\in E$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$.

1. (a) $0_{\mathbb{K}}.x=0_E$ et (b) $\lambda.0_E=0_E$
2. $(-1_{\mathbb{K}}).x=-x$
3. $(\lambda-\mu).x=\lambda.x-\mu.x$
4. $\lambda.x=0_E\iff(\lambda=0_{\mathbb{K}})\ \vee(x=0_E)$
5. $(\lambda.x=\lambda.y)\wedge(\lambda\neq0)\implies x=y$
6. $(\lambda.x=\mu.x)\wedge(x\neq0_E)\implies\lambda=\mu$

Démonstration : nous nous contenterons de démontrer les points 1 à 4, mais de deux manières différentes.

1. (a) Méthode 1 : Soit $x \in E$. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x$ en vertu de l'axiome 2)(b). Après simplification dans le groupe E : $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$

   Méthode 2 : Fixons x dans E. En vertu de l'axiome 2)(b), $\phi_x : \begin{cases} \mathbb{K} \to E \\ x \mapsto \lambda.x \end{cases}$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K}, +)$ dans $(E, +)$, donc $\phi_x(0_{\mathbb{K}}) = 0_E$ i.e $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$

   (b) Méthode 1 : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E + \lambda.0_E$ en vertu de l'axiome 2)(a). Après simplification dans le groupe E : $\lambda.0_E = 0_E$

   Méthode 2 : Fixons λ dans $\mathbb{K}$. En vertu de l'axiome 2)(a), $\phi_\lambda : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \lambda.x \end{cases}$ est un morphisme de groupes de $(E, +)$ dans $(E, +)$. Donc $\phi_\lambda(0_E) = 0_E$ i.e $\lambda.0_E = 0_E$
2. Soit $x \in E$. ϕ_x étant un morphisme de groupes additifs, on a $\phi_x(-1_{\mathbb{K}}) = -\phi_x(1_{\mathbb{K}})$, soit $(-1_{\mathbb{K}}).x = -x$
3. $(\lambda - \mu).x = \lambda.x + (-\mu).x = \lambda.x + ((-1_{\mathbb{K}})(\mu)).x = \lambda.x + (-1_{\mathbb{K}}).(\mu.x) = \lambda.x - \mu.x$
4. Supposons $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$, alors $\lambda^{-1}.(\lambda.x) = (\lambda^{-1}\lambda).x = 1_{\mathbb{K}}.x = x$ Or par 1) $\lambda^{-1}.0_E = 0_E$, d'où $x = 0_E$

Remarque : L'axiome $(E, +)$ groupe **commutatif** est inutile en caractéristique $\neq 2$. Le fait que le groupe $(E, +)$ soit commutatif peut se déduire directement des axiomes 2 :
En effet, soit $(x, y) \in E^2$. Alors :

— D'une part, $(1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}).(x + y) = 1_{\mathbb{K}}.(x + y) + 1_{\mathbb{K}}.(x + y) = x + y + x + y$

— D'autre part, $(1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}).(x + y) = (1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}).x + (1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}).y = x + x + y + y$

D'où en simplifiant par x à gauche et par y à droite : $y + x = x + y$. Donc $(E, +)$ commutatif.

Définition 1-1-4 : Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si F est stable pour les deux lois interne et externe, et est un espace vectoriel pour les lois induites. En abrégé, on écrira **sev**.

Propriété 1-1-5 (caractérisation d'un sev) : Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si :

1. $0_E \in F$
2. $\forall (x, y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda.x + y \in F$

Nous prouvons très souvent qu'un ensemble F est un espace vectoriel en justifiant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel bien connu.

Définition 1-1-6 (morphismes d'ev) : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $u : E \to F$ est dite **linéaire** si :

1. $\forall (x, y) \in E^2 \quad u(x + y) = u(x) + u(y)$
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad u(\lambda.x) = \lambda.u(x)$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ ou $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F ; si $E = F$, on parle d'**endomorphisme**. Si u est bijective, d'**isomorphisme** et d'**automorphisme** pour un endomorphisme bijectif.

On note $\mathcal{L}(E)$ ou $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E et $\mathcal{GL}(E)$ ou $GL(E)$ celui de ses automorphismes.

Définition et propriété 1-1-7 (image et noyau) : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. $im(u) = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé **image** de E par u.
2. $Ker(u) = u^{-1}(0_F)$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé **noyau** de u.

Propriété 1-1-8 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. u est surjectif si et seulement si $im(u) = F$
2. u est injectif si et seulement si $Ker(u) = \{0_E\}$

Démonstration :

1. u est surjectif si et seulement si $u(E) = F$ si et seulement si $im(u) = F$
2. Supposons u injectif. On a bien évidemment $\{0_E\} \subset Ker(u)$.. Soit $x \in Ker(u)$. Alors $u(x) = 0_E = u(0_E)$, donc par injectivité de u, $x = 0_E$ et le résultat annoncé.
   Réciproquement, supposons que $Ker(u) = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $u(x) = u(y)$. Par linéarité de u : $u(x-y) = 0_F$, donc $x - y \in Ker(u)$, d'où $x = y$. Donc u injective.

1.2 Une autre définition de la notion d'espace vectoriel

Nous allons réécrire la loi externe dans la définition d'un espace vectoriel par analogie avec la notion de groupes opérant sur un ensemble (cf annexe). Nous noterons E^E l'ensemble des applications de E dans E et 1 pour $1_{\mathbb{K}}$.

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définissons $\phi : \begin{cases} \mathbb{K} \to E^E \\ \lambda \mapsto \phi_\lambda \end{cases}$ où $\phi_\lambda : \begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \lambda.x \end{cases}$

1. L'axiome 2)(d) nous dit que $\phi_1 = id_E$ i.e $\phi(1) = id_E$.
2. L'axiome 2)(a) nous dit que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, ϕ_λ est un endomorphisme du groupe additif $(E,+)$
3. L'axiome 2)(b) nous dit que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\phi_{\lambda+\mu} = \phi_\lambda + \phi_\mu$
4. L'axiome 2)(c) nous dit que pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $\phi_{\lambda\mu} = \phi_\lambda \circ \phi_\mu$

Notons $End(E)$ l'ensemble des endomorphismes du groupe $(E,+)$. Alors $(End(E),+,\circ)$ est un anneau pour les lois évidentes :

$\begin{cases} (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) \end{cases}$

Comme usuellement, tous les anneaux sont supposés unitaires et ici l'unité de $End(E)$ est id_E.

Les remarques précédentes nous assurent que $\phi : \begin{cases} (\mathbb{K},+,\times) \to (End(E),+,\circ) \\ \lambda \mapsto \phi_\lambda \end{cases}$ est un morphisme d'anneaux.

Et la réciproque est VRAIE :

Donnons-nous un corps commutatif $(\mathbb{K},+,\times)$, un groupe commutatif $(E,+)$ et un morphisme d'anneaux (unitaires) ϕ du corps $(\mathbb{K},+,\times)$ dans l'anneau $(End(E),+,\circ)$.

Posons pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad \lambda.x = \phi(\lambda)(x) \in E$.

1. Fixons $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\phi(\lambda) \in End(E)$. D'où pour tout $(x, y) \in E^2 \ : \ \phi(\lambda)(x+y) = \phi(\lambda)(x) + \phi(\lambda)(y)$ i.e $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$ D'où 2) (a)
2. Fixons $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Comme ϕ est un morphisme d'anneaux du corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ dans l'anneau $(End(E), +, \circ)$, $\forall x \in E, \quad \phi(\lambda+\mu)(x) = \phi(\lambda)(x) + \phi(\mu)(x)$ i.e $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$ D'où 2) (b)
3. Fixons $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Comme ϕ est un morphisme d'anneaux du corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ dans l'anneau $(End(E), +, \circ)$, $\forall x \in E, \quad \phi(\lambda\mu)(x) = (\phi(\lambda) \circ \phi(\mu))(x)$ i.e $(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$ D'où 2) (c)
4. Comme ϕ est un morphisme d'anneaux du corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ dans l'anneau $(End(E), +, \circ)$, $\forall x \in E, \quad \phi(1_{\mathbb{K}})(x) = id_E(x)$ i.e $1_{\mathbb{K}}.x = x$ D'où 2) (d)

D'où la :

Propriété 1-2-1 : Définir un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, c'est aussi se donner :
- un corps commutatif $(\mathbb{K}, +, \times)$;
- un groupe commutatif $(E, +)$;
- un morphisme d'anneaux du corps $(\mathbb{K}, +, \times)$ dans l'anneau $(End(E), +, \circ)$.

Comme $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, nous savons que $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe.
Les axiomes 2) (c) et 2) (d) peuvent se réinterpréter en terme d'actions de groupes : la restriction $\tilde{\phi}$ de ϕ à $\mathbb{K}^*$ définit une action du groupe $(\mathbb{K}^*, \times)$ sur l'ensemble E.

$\tilde{\phi}$ est donc à valeurs dans le groupe symétrique $(S(E), \circ)$ mais aussi dans $End(E)$ comme vu auparavant ; bref $(\forall \lambda \in \mathbb{K}^*) \quad \tilde{\phi}(\lambda) \in (Aut(E), \circ)$.
Donc $\tilde{\phi}$ induit une action de $(\mathbb{K}^*, \times)$ sur E par automorphismes de groupes i.e une action de $(\mathbb{K}^*, \times)$ sur $(Aut(E), \circ)$.

Nous noterons désormais λx à la place de $\lambda.x$, ce qui n'amène aucune confusion.

Exemple 1-2-2 : $\mathbb{R}$ n'est pas un sev de $\mathbb{C}$. Plus généralement, si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ sont deux corps commutatifs, alors $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev, mais l'inverse est impossible.

Démonstration : Clairement $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev. La réciproque est fausse. Supposons en effet par l'absurde qu'il existe un morphisme d'anneaux ϕ de $(\mathbb{C}, +, \times)$ dans $(\mathrm{End}(\mathbb{R}), +, \circ)$.
Or (exercice) $\mathrm{End}(\mathbb{R}) = \{f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax, \quad a \in \mathbb{R}\}$.
Mais alors, comme $\phi(1) = id_{\mathbb{R}}$, on a : $\phi(-1) = \phi(\mathbf{i}^2) = \phi(\mathbf{i}) \circ \phi(\mathbf{i})$ d'une part et $\phi(-1) = -\phi(1) = -id_{\mathbb{R}}$ d'autre part.
Si l'on note a l'unique réel tel que $\phi(\mathbf{i}) = a id_{\mathbb{R}}$, on a : $a^2 id_{\mathbb{R}} = -id_{\mathbb{R}}$, d'où $a^2 = -1$. Absurde !

Applications :

1. Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \geq 1$. On note $K(E) = \{f : E \to E \text{ constantes}\}$. Alors on peut munir $K(E)$ d'une structure de $\mathbb{R}$-ev. En donner la dimension.
2. Soit $(G, +)$ un groupe abélien.
   (a) G peut être muni au plus d'une structure de $\mathbb{Q}$-ev.
   (b) G peut être muni d'une structure de $\mathbb{Q}$-ev ssi (i) G est *sans torsion* : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in G \setminus \{0\})\ nx \neq 0$ et (ii) G est *divisible* : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall x \in G)(\exists y \in G)\ x = ny$.

1.3 Parties/Familles génératrices, Parties/familles libres, Bases

A. Parties/Familles génératrices

Propriété - Définition 1-3-1 (Combinaison linéaire - sev engendré) : Soit I un ensemble quelconque.

1. Soit une famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur $x = \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$, où J est une **partie finie** de I.

   Ainsi, toute combinaison linéaire de vecteurs de E sera toujours une **somme finie** de vecteurs. Nous pouvons écrire $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$, où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille *presque nulle* d'éléments de $\mathbb{K}$ i.e tous les λ_i sont nuls **sauf un nombre fini d'entre eux**.
2. L'intersection d'un nombre quelconque de sev de E est un sev de E.
   En particulier $\bigcap_{A\subset F \ | \ F \text{ sev de } E} F$ est un sev de E. C'est le plus petit sev de E contenant la partie A. On le note $\text{Vect}(A)$ ou $< A >$.
3. $\text{Vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A. On l'appelle **espace vectoriel engendré** par la partie A.
   En particulier, si $A = \{x_i \mid i \in I\}$, **Vect**$(x_i)_{i\in I}$ **est aussi l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs** x_i **quand** i **parcourt** I**.**

Définition 1-3-2 : On dit que la partie X est **génératrice** de E ou **engendre** E si tout élément de E est combinaison linéaire de vecteurs de X i.e $\text{Vect}(X) = E$.
Si $X = \{x_i \ ; \ i \in I\}$, on dit aussi que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est **génératrice** de E.

Remarque : Dans le cas où $I = [\![1;n]\!]$, $(x_1,\ldots,x_n)$ est une famille génératrice de E si pour tout vecteur $x \in E$, il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.

Autrement dit, l'application (linéaire) $\begin{cases} \mathbb{K}^n \to E \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{cases}$ est surjective.

Propriété 1-3-3 (propriété des Vect) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X, Y deux parties de E et $x, a, b \in E$.

1. **inclusion** : Si $X \subset Y$, alors $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$
2. **ôter un vecteur** : Si $x \in X$ est combinaison linéaire d'éléments de $X \setminus \{x\}$, alors $\text{Vect}(X) = \text{Vect}(X \setminus \{x\})$
3. **remplacer un vecteur (lemme d'échange)** : Si b est combinaison linéaire d'éléments de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient non nul sur a, alors $\text{Vect}(X \cup \{a\}) = \text{Vect}(X \cup \{b\})$

Démonstration :

1. $X \subset Y \subset \text{Vect}(Y)$. Comme $\text{Vect}(X)$ est le plus petit sev de E contenant X et que le sev $\text{Vect}(Y)$ contient X, on a par minimalité $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(Y)$.
2. $X \setminus \{x\} \subset X$, donc par ce qui précède $\text{Vect}(X \setminus \{x\}) \subset \text{Vect}(X)$. Par hypothèse, $x \in X$ est combinaison linéaire d'éléments de $X \setminus \{x\}$, donc $X \subset \text{Vect}(X \setminus \{x\})$.
   Toujours par 1. $\text{Vect}(X) \subset \text{Vect}(X \setminus \{x\})$. D'où l'égalité annoncée.

3. Posons $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$. On a $\text{Vect}(X \cup \{b\}) \subset \text{Vect}(X \cup \{a\})$. Par hypothèse $b = \mu.a + \sum_{i\in J} \lambda_i x_i$, où $J \subset I$ est finie et $\mu \neq 0$. D'où $a = \frac{-1}{\mu}\left(-b + \sum_{i\in J} \lambda_i x_i\right) \in \text{Vect}(X \cup \{b\})$. Ainsi $\text{Vect}(X \cup \{a\}) \subset \text{Vect}(X \cup \{b\})$ et l'égalité annoncée.

B. Parties/Familles libres

Définition 1-3-4 : Soit I un ensemble quelconque.

1. Une famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite **libre** si pour toute sous-famille finie $(x_i)_{i\in J}$ (J finie) : $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = 0_E \implies (\forall i \in J) \quad \lambda_i = 0.$
2. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est dite **liée** si elle n'est pas libre i.e s'il existe (au moins) un vecteur $x_{i_0} \in E$ qui s'écrive comme combinaison linéaire des autres x_i.

Remarque : Dans le cas où $I = [\![1; n]\!]$, une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de E est libre si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$, on a $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Autrement dit, l'application (linéaire) $\begin{cases} \mathbb{K}^n \to E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \end{cases}$ est injective.

Propriété 1-3-5 (propriété des parties libres / liées) : Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, X, Y deux parties de E et $y \in E$.

1. **inclusion** : Si Y est libre et $X \subset Y$, alors X est libre. (par contraposée, si X est liée et $X \subset Y$, alors Y est liée).
2. **ajouter un vecteur** : Si X est libre et $y \notin \text{Vect}(X)$, alors $X \cup \{y\}$ est libre.

Démonstration :

1. Trivial !
2. Sans perte de généralité, on peut supposer X de cardinal fini (relire la définition de famille libre). Posons $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
   Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \mu y = 0_E$.
   Si $\mu \neq 0$, alors $y = -\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in \text{Vect}(X)$. Contradiction ! Donc $\mu = 0$, et partant, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$. Or X est une famille libre, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc $X \cup \{y\}$ est libre.

C. Bases

Définition 1-3-6 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre **et** génératrice.

Remarque : Une base $\mathcal{B}$ est donc une famille qui permet d'écrire n'importe quel vecteur de E de manière unique, comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{B}$.

Propriété 1-3-7 : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I} \in E^I$. Alors :
$\mathcal{B} = (x_i)_{i \in I}$ est une base de E ssi $(\forall x \in E)$ $(\exists!(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle) tel que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i$.
Les scalaires $(\lambda_i)_{i \in I}$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque : Dans le cas où $I = [\![1; n]\!]$, une famille $(x_1, \ldots, x_n)$ de E est une base de E si pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$.
Autrement dit, l'application (linéaire) $\begin{cases} \mathbb{K}^n \to E \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \end{cases}$ est bijective.

1.4 Première caractérisation d'une base

Propriété 1-4-1 : Soit $\mathcal{B}$ une partie non vide du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{B}$ est une base de E,
2. $\mathcal{B}$ est une partie génératrice de E minimale pour l'inclusion,
3. $\mathcal{B}$ est une partie libre maximale de E pour l'inclusion.

Démonstration : Procédons en prouvant que (1) $\iff$ (2) et que (1) $\iff$ (3).

(1) $\implies$ (2) : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathcal{B}$ est une partie génératrice de E. Prouvons qu'elle est minimale au sens de l'inclusion. Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathcal{B}' \subsetneq \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}'$ soit encore une partie génératrice de E. Soit alors $x \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$: x est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}'$. Mais alors $\mathcal{B}' \cup \{x\}$ est liée, donc $\mathcal{B} \supsetneq \mathcal{B}' \cup \{x\}$ aussi. Contradiction.

(2) $\implies$ (1) : Soit $\mathcal{B}$ une partie génératrice de E minimale au sens de l'inclusion. Prouvons que $\mathcal{B}$ est une partie libre. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas. Il existe alors une combinaison linéaire non triviale d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $\sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b = 0_E$.
Soit $b_0 \in \mathcal{B}$ tel que $\lambda_{b_0} \neq 0$: $b_0 = -\frac{1}{\lambda_{b_0}} \sum_{b \in \mathcal{B} \setminus \{b_0\}} \lambda_b b \in < \mathcal{B} \setminus \{b_0\} >$. D'après la propriété 1-3-3, $\mathcal{B} \setminus \{b_0\}$ engendre E, ce qui contredit la minimalité de $\mathcal{B}$ comme partie génératrice de E.

(1) $\implies$ (3) : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathcal{B}$ est une partie libre de E. Prouvons qu'elle est maximale au sens de l'inclusion. Supposons par l'absurde qu'il existe $\mathcal{B}' \supsetneq \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}'$ soit encore une partie libre de E. Soit alors $x \in \mathcal{B}' \setminus \mathcal{B}$: $\mathcal{B} \cup \{x\} \subset \mathcal{B}'$ est encore une partie libre de E. Or $\mathcal{B}$, en tant que base est aussi génératrice de E. Donc il existe une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$ telle que $x = \sum_{b \in \mathcal{B}} \lambda_b b$. D'où $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est liée et donc par la propriété 1-3-5, $\mathcal{B}'$ est liée. Contradiction.

(3) $\implies$ (1) : Soit $\mathcal{B}$ une partie libre maximale de E. Supposons par l'absurde que $\mathcal{B}$ ne soit pas génératrice. Il existe alors $x \in E \setminus \mathcal{B}$ tel que x ne soit pas combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Par la propriété 1-3-5, $\mathcal{B} \cup \{x\}$ est libre. Contredit $\mathcal{B}$ partie libre maximale de E.

1.5 Applications linéaires et bases

Théorème 1-5-1 (Construction d'applications linéaires à l'aide de bases) : Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour toute famille $(b_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $u : E \to F$ telle que : $(\forall i \in I)\ u(e_i) = b_i$.

Démonstration :
- Existence : on pose pour toute sous-famille finie de scalaires $(\lambda_i)_{i\in J}$ où $J \subset I$:
  $u\left(\sum_{i\in J} \lambda_i e_i\right) = \sum_{i\in J} \lambda_i b_i.$
- Unicité : S'il existe deux applications linéaires u et v telles que pour tout $i \in I$ $u(e_i) = v(e_i) = b_i$, alors par linéarité de u et v et du fait que $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E : $(\forall x \in E)\ u(x) = v(x)$.

Théorème 1-5-2 (Critère d'isomorphisme) : Soit E un espace vectoriel muni d'une base et $u : E \to F$ une application linéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est un isomorphisme de E sur F.
2. L'image par u de *toute* base de E est une base de F.
3. L'image par u d'*UNE* base de E est une base de F.

Démonstration : en exercice.

1.6 De l'influence du corps $\mathbb{K}$

Nous ne nous étendrons pas sur le sujet dans ce document, mais rappelons simplement que la notion de $\mathbb{K}$-ev est une structure rigide, dédiée au calcul pour traduire des situations géométriques. Seulement, si $\mathbb{R}$ en tant que corps de base semble naturel, il n'est pas le seul ! Ainsi il y a aussi les corps finis tels les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p premier).

Anticipons un peu sur la suite : considérons par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors :

1. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1 ; (1) en est une base.
2. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 ; $(1, i)$ en est une base.
3. $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie.

Plus généralement, soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps commutatifs (on dit que $\mathbb{L}$ est une extension de $\mathbb{K}$). Si $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ est finie, on pose $[\mathbb{L} : \mathbb{K}] = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ et l'entier $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ s'appelle le **degré** de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$.
Si $\mathbb{K}$ est un corps fini, on a : $|\mathbb{L}| = |\mathbb{K}|^n$, avec $n = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Théorème 1-6-1 (de la base télescopique) : Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ des corps commutatifs, $(e_i)_{i\in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$ et $(f_j)_{j\in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$. Alors $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$.

Démonstration : Nous allons procéder en 2 étapes :

1. $\underline{(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J} \text{ est libre sur } \mathbb{K}}$: soit $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in I\times J} \in \mathbb{K}^{\mathbb{I}\times\mathbb{J}}$ tel que $\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_{ij} e_i f_j = 0$.

   On a donc $\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} \lambda_{ij} e_i\right) f_j = 0$. Comme $(f_j)_{j\in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$, on a pour tout

$j \in J : \sum_{i \in I} \lambda_{ij} e_i = 0$.

Comme $(e_i)_{i \in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, alors pour tout $i \in I : \lambda_{ij} = 0$. Bref, pour tout $(i, j) \in I \times J$, $\lambda_{ij} = 0$.

2. $\underline{(e_i f_j)_{(i,j) \in I \times J} \text{ engendre } \mathbb{M}}$: soit $x \in \mathbb{M}$. Comme $(f_j)_{j \in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$, il existe $(\mu_j)_{j \in J} \in \mathbb{L}^{|J|}$ tel que $y = \sum_{j \in J} \mu_j f_j$.

   Comme $(e_i)_{i \in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, alors pour tout $j \in J$, il existe $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}^{|I|}$ tel que $\mu_j = \sum_{i \in I} \lambda_{ij} e_i$. D'où $x = \sum_{(i,j) \in I \times J} \lambda_{i,j} e_i f_j$.

Corollaire 1-6-2 (multiplicativité du degré) : En reprenant les hypothèses du théorème précédent, si les degrés sont finis, alors : $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Nous ne nous aventurerons pas plus loin dans la **théorie des corps**, mais invitons le lecteur intéressé à approfondir ses connaissances à travers des ouvrages classiques ou des ressources disponibles sur le Web.

Un dernier mot quand même pour le cas des corps finis.

Exercice : Soit E un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-ev de dimension n.

1. Combien existe-t-il de bases dans E ?
2. Combien existe-t-il d'automorphismes de E ?
3. Combien existe-t-il de sev de dimension k dans E ?

2 Dimension d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 2-0 : On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Sinon il est dit de **dimension infinie**.

Remarque : il peut sembler étrange de parler de dimension finie alors même que nous n'avons pas encore défini la notion de dimension d'un espace vectoriel ! Certains auteurs préfèrent d'ailleurs parler d'espaces vectoriels *de type fini*, par analogie avec les modules de type fini. Nous n'adopterons pas ce vocable pour rester en cohérence avec les programmes de bac +1. Nous verrons plus loin que cette définition a un bien un sens.

2.1 Le cas de la dimension finie

Dans toute cette section, nous considérerons que l'espace vectoriel E est de dimension finie i.e engendré par un nombre fini de vecteurs de E. Le résultat qui suit est à la base de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie. Sa démonstration, très jolie, est très instructive et à retenir.

Lemme fondamental 2-1-1 : Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.

Démonstration : Remarquons alors que d'après la propriété 1-3-5, si $m > n$, toute sur-famille de m vecteurs sera liée.
Pour ne pas se trainer le cas où $n = 0$, on supposera $E \neq \{0_E\}$ et donc $n \geq 1$.
Notons $X = (x_1, \dots, x_n)$ une famille génératrice de E. Supposons par l'absurde qu'il existe une famille libre $Y = (y_1, \dots, y_{n+1})$ de $n+1$ vecteurs de E.

Posons pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$: "E est engendré par une famille de n vecteurs dont les $n-k$ premiers appartiennent à X et les k suivants à Y".

Initialisation : E est engendré par les n vecteurs de X, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in [\![0; n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie : "E est engendré par $(x_1, \dots, x_{n-k}, y_1, \dots, y_k)$ pour certains $x_1, \dots, x_{n-k}$ vecteurs de X et $y_1, \dots, y_k$ de Y" - aucun vecteur de Y par convention si $k = 0$.
Comme Y a $n+1$ éléments, on peut trouver un vecteur $y_{k+1} \in Y$ distinct de $y_1, \dots, y_k$. $y_{k+1} = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j y_j$ pour certains $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-k}$ et $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{K}$.
Si tous les λ_i sont nuls, alors $y_{k+1} \in < \{y_1, \dots, y_k\} >$, donc $(y_1, \dots, y_{k+1}) \subset Y$ liée. Contradiction. Donc il existe $i \in [\![1; n-k]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$. Quitte à modifier l'ordre des x_i, on peut supposer $\lambda_{n-k} \neq 0$. Mais alors $x_{n-k} \in < \{x_1, \dots, x_{n-k-1}, y_1, \dots, y_{k+1}\} >$, ce qui achève la récurrence.

Avec $k = n$, on en déduit que E est engendré par n vecteurs de Y. Soit y le $n+1$-ème vecteur de Y autre que ces n vecteurs. Alors y est combinaison linéaire de ces n vecteurs et donc Y est liée. Absurde ! D'où le résultat annoncé.

Théorème 2-1-2 (existence de bases) : Soit G une famille génératrice finie de E et L une famille libre de E incluse dans G. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

Remarquons qu'il existe toujours une famille libre $L \subset G$: $L = \emptyset$. Donc l'énoncé précédent a bien un sens.

Démonstration : Nous proposons deux démonstrations. La première, théorique, est tout à fait valable, mais n'a pas le côté algorithmique de la seconde qui est plus utile en pratique.

Méthode 1 (théorique) : Soit $\mathcal{L} = \{L' \ ; \ L \subset L' \subset G \text{ et } L' \text{ libre}\}$. $\mathcal{L} \neq \emptyset$ car $L \in \mathcal{L}$.
Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{N}$: $\mathcal{N} = \{\text{Card}(L') \ ; \ L' \in \mathcal{L}\}$.
$\mathcal{N} \neq \emptyset$ car $\text{Card}(L) \in \mathcal{N}$.
$\mathcal{N}$ est majorée par $n = \text{Card}(G)$ d'après le lemme fondamental. Donc $\mathcal{N}$ a un élément maximum p. Soit $B \in \mathcal{L}$ de cardinal p. Alors B est une base de E. En effet :
B est libre car $B \in \mathcal{L}$, et B est génératrice. Sinon il existerait $a \in G \setminus B$ tel que $a \notin \text{Vect}(B)$. Mais alors $B \cup \{a\}$ serait libre et $\text{Card}(B \cup \{a\}) > \text{Card}(B)$, ce qui contredit la maximalité de $\text{Card}(B)$.
Remarquons que nous avons construit ici une famille libre maximale.

Méthode 2 (algorithme de la base incomplète) : on peut supposer $L = (x_1, \dots, x_p)$ et $G = (x_1, \dots, x_n)$ avec $p \leq n$.
Si L engendre E, on pose $B = L$ (L base car libre et génératrice).
Sinon :
  $B \longleftarrow L$ (on initialise B par L)
  Pour i variant de $p+1$ à n faire :
    Si $x_i \notin \text{Vect}(L)$ faire :
      Rajouter x_i à B (on ne fait rien si $x_i \in \text{Vect}(L)$).
    Fin **Si**
  Fin **Pour**
Fin **Si**

La famille B obtenue à la fin de l'algorithme est nécessairement libre (on a conservé la liberté à chaque étape) et elle est aussi génératrice. Par construction, elle est génératrice minimale : on a enlevé à G tous les x_i "en trop". C'est donc une base de E.

Corollaire 2-1-3 (théorème de la base incomplète / extraite) : Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. **Théorème de la base incomplète** : Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.
2. **Théorème de la base extraite** : De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base finie de E.

En particulier, E possède une base finie.

Démonstration : Nous allons nous appuyer sur le théorème précédent.

1. Soit G une famille finie engendrant E et L une famille libre de E (donc finie par le lemme fondamental). Alors $G' = L \cup G$ (dans le sens on concatène L et G) est une famille génératrice de E. Ainsi, $L \subset G'$ et en utilisant l'algorithme de la base incomplète, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G'$.

2. Soit G' une famille génératrice de E. Comme E est engendrée par une famille finie G, tout élément de G est combinaison linéaire (donc finie) de vecteurs de G'. Nous pouvons donc nous ramener au cas où G' est finie :
   En effet, posons $G = (x_1, \dots, x_N)$ et $G' = (e_j)_{j \in J}$. Pour tout $i \in [\![1; N]\!]$, il existe $J_i \subset J$ finie et $(\lambda_{i,j})_{j \in J_i} \in \mathbb{K}^{J_i}$ telle que $x_i = \displaystyle\sum_{j \in J_i} \lambda_{i,j} e_j$.
   Posons alors $\tilde{J} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N} J_i$: $\tilde{J}$ est finie et par construction (très bon exercice) : $\mathrm{Vect}(G') = \mathrm{Vect}(x_j)_{j \in \tilde{J}} = E$. Posons $G'' = (x_j)_{j \in \tilde{J}}$. On a $G'' \subset G'$ en termes de parties.
   Par convention, $L = \emptyset \subset G''$ est libre, donc d'après l'algorithme de la base incomplète, il existe une base B de E telle que $L \subset B \subset G'' \subset G'$.

Théorème-définition 2-1-4 : Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal qu'on appelle la **dimension** de E. On la note $\dim(E)$.
Si $E = \{0_E\}$, on décide par convention que $\dim(E) = 0$.

Démonstration : Supposons $E \neq \{0_E\}$. Comme E est engendré par un nombre fini n de vecteurs, nous savons d'après le lemme fondamental que toute partie libre de E est de cardinal au plus n. En particulier les bases de E.
Soient B et B' deux bases de E. Comme B' est libre et B génératrice, alors $\mathrm{Card}(B') \leq \mathrm{Card}(B)$. En échangeant les rôles de B et de B' : $\mathrm{Card}(B) \leq \mathrm{Card}(B')$.
Donc $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B')$ et toutes les bases de E ont le même cardinal.
Ce cardinal commun s'appelle la **dimension** de E.

Remarques :

1. Ainsi, un espace vectoriel E de dimension finie (= engendré par un nombre fini de vecteurs par définition) a une dimension (cardinal commun de toutes ses bases) qui est finie ! Ce qui justifie a posteriori cette définition.
2. Si $E \neq \{0_E\}$, alors il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
   Autrement dit, la dimension caractérise entièrement un $\mathbb{K}$-ev engendré par un nombre fini de vecteurs [1].

Corollaire 2-1-5 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ une famille finie de cardinal m.

1. Si ν est libre, alors $m \leq n$,
2. Si ν est génératrice, alors $m \geq n$,
3. Si $m > n$, alors ν est liée.

Corollaire 2-1-6 (seconde caractérisation d'une base en dimension finie) : Soit <u>E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n</u> et $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ <u>une famille de n vecteurs</u>. Il y a équivalence entre :

1. ν est une base,
2. ν est libre,
3. ν est génératrice.

1. Ce n'est pas le cas des groupes. Par exemple $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ et $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes

Remarque : Dans la pratique, on construira une famille libre de n vecteurs de E. Encore faut-il connaître déjà la dimension de E !

Applications :

1. Soient $\mathbf{u} = (1, 1)$ et $\mathbf{v} = (-2, 1)$. Prouver que $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes d'un vecteur $\mathbf{X} = (x, y)$ dans cette base.
2. Soient $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 0)$ et $\mathbf{w} = (3, 0, 0)$. Prouver que $B = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes d'un vecteur $\mathbf{X} = (x, y, z)$ dans cette base.
3. Prouver que dans $E = \mathbb{K}^n$, si les a_k ne sont pas tous nuls, alors :
   $H = \left\{ \mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0 \right\}$ est un sev de E de dimension $n - 1$.
4. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-ev des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. Alors toute famille de n vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ de degrés (resp. de valuations) échelonné(e)s est une base de E.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) A est inversible,
   (b) A est inversible à droite : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AB = I_n$,
   (c) A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid BA = I_n$
   (d) $(\forall Y \in \mathbb{K}^n)$ l'équation $(E)\ :\ Y = AX$ possède au moins une solution $X \in \mathbb{K}^n$.
   (e) L'équation $(E_0)\ :\ AX = 0$ admet 0 pour unique solution.
6. Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{K}$. Les suites (u_n) vérifiant :
   $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+2} = a_n u_{n+1} + b_n u_n$ forment un sev de l'espace $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites, de dimension 2.
7. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
   (a) Prouver que $L(E)$ est de dimension n^2.
   (b) Soit $u \in L(E)$. Prouver qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{L(E)}$.

Lemme 2-1-7 :

1. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre de E et $u \in L(E, F)$. Supposons u injective. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F.
2. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille génératrice de E et $u \in L(E, F)$. Supposons u surjective. Alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est génératrice de F.

Démonstration :

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0_F$.
   Par linéarité de u : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right)$, d'où : $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F$.
   Par injectivité de u : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre dans F.
2. Soit $y \in F$. Par surjectivité de u, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$.
   Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de E, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
   Donc par linéarité de u, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i)$. D'où $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ génératrice de F.

Remarque : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives n et p et $u \in L(E, F)$.

1. Si u injective, alors : $n \leq p$ (E est le "plus petit" en dimension)
2. Si u surjective, alors : $n \geq p$ (E est le "plus grand" en dimension)

Théorème 2-1-8 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension finie, et $u \in L(E, F)$. Alors : **(a) u est injective ssi (b) u est surjective ssi (c) u est bijective**.

Démonstration :

1. Il est clair que $(c) \implies (a)$ et $(c) \implies (b)$.
2. Supposons (a) vraie et soit $B_E = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Comme u est injective, on a par le lemme 2-1-7 : $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ libre dans F. Ainsi, $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille libre de n vecteurs de F qui est de dimension n, c'en est donc une base d'après le corollaire 2-1-6. u transformant une base de E en une base de F, le théorème 1-5-2 nous assure que u est bijection linéaire de E sur F.
3. Adapter le raisonnement précédent en remplaçant "libre" par "génératrice" et "injective" par surjective".

Contre-exemples :

1. Si les dimensions sont finies mais inégales, le résultat tombe en défaut.
   Par exemple, $u : (x, y) \in \mathbb{K}^2 \mapsto (x, y, 0) \in \mathbb{K}^3$.
2. Si les dimensions sont infinies et égales, le résultat est aussi faux.
   Considérons par exemple les "shifts" : $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ou
   $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mapsto (0, u_0, u_1, \ldots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Application : Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre associative, unitaire et sans diviseurs de zéro. Si A est de dimension finie, alors A est un corps.

2.2 Dimension des sev, des produits d'ev et des supplémentaires

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des ev de dimension finie.

Théorème 2-2-1 (dimension d'un sev) : Soit F un sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$, avec égalité ssi $E = F$.

Démonstration : Commençons par remarquer que toute famille libre de F est aussi une famille libre de E.
Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc $F \neq \{0_E\}$.
Posons $\mathcal{N} = \{\text{Card}(L) \mid L \subset F \text{ et } L \text{ libre}\}$.

1. Soit $x \in F \setminus \{0\}$. Alors (x) est libre et donc $1 \in \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{N} \neq \emptyset$.
2. D'après le corollaire 2-1-5, $\mathcal{N}$ est majorée par $n = \dim(E)$. Ainsi, $\mathcal{N}$ possède un plus grand élément $p \leq n$.
3. Soit alors L une famille libre de F à p éléments. Par construction, L est une famille libre maximale du $\mathbb{K}$-ev F, c'en est donc une base. Comme toutes les bases ont le même cardinal, $\dim(F) = p \leq n = \dim(E)$.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Nous rappelons que :

Définition 2-2-2 :

1. Deux sev F et G de E sont **en somme directe** si $F \cap G = \{0\}$
2. Deux sev F et G de E sont **supplémentaires** dans E si :
   — $E = F + G$
   — $F \cap G = \{0\}$.
   Ceci signifie que $(\forall x \in E)(\exists!(f, g) \in F \times G) \mid x = f + g$. On note $\boxed{E = F \oplus G}$

Théorème 2-2-3 :

1. Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions respectives p et q. Alors $\dim(E_1 \times E_2) = p+q$.
2. Soient F et G deux sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E, de dimensions respectives p et q.
   Alors $\dim(F \oplus G) = p + q$.

Démonstration :

1. Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_1 et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de E_2. On vérifie aisément que $\{(e_1, 0), \ldots, (e_p, 0), (0, f_1), \ldots, (0, f_q)\}$ est une base de $E_1 \times E_2$.
2. $\phi : \begin{cases} F \times G \to F \oplus G \\ (f, g) \mapsto f + g \end{cases}$ est un isomorphisme.
   ϕ est clairement linéaire, surjective par construction. Enfin, ϕ est injective : soit $(f, g) \in Ker\ \phi$. Alors $f + g = 0_E$ i.e $f = -g$. Donc $f \in F \cap G = \{0_E\}$ et partant $g = 0_E$.

Remarque : Dire que F et G sont en somme directe se traduit aussi par : soit $(f, g) \in F \times G$ tel que $f + g = 0_E$, alors $f = g = 0_E$.

Plus généralement, nous pouvons énoncer le :

Théorème et définition 2-2-4 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont n sev d'un même $\mathbb{K}$-ev E, on dit que $F_1, \ldots, F_n$ sont **en somme directe**, et on note $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ si :
   $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0_E \implies x_1 = \cdots = x_n = 0_E$.
2. On a alors : $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^{n} F_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$
3. De manière générale, $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim(F_i)$

Remarque : Nous avons vu au théorème 1-5-2 qu'une application linéaire u était entièrement définie par l'image d'une base. De même, si $E = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, u est entièrement définie par sa restriction aux F_i.

Théorème 2-2-5 :

1. Tout sev F admet (au moins) un supplémentaire G et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
2. Deux supplémentaires G et H d'un même sev F sont isomorphes.
   Le résultat est faux en dimension infinie.

Démonstration :

1. Soit $B_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On la complète en une base $B = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ de E. Alors $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est clairement un supplémentaire de F dans E. On applique ensuite le théorème précédent pour établir que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.
2. Soit $B_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Soit $B_G = (g_{p+1}, \dots, g_n)$ une base de G et $B_H = (h_{p+1}, \dots, h_n)$ une base de H. Par le théorème 1-5-1, il existe une unique application linéaire $u : G \to H$ telle que $(\forall i \in [\![p+1; n]\!])\ u(g_i) = h_i$. u transforme une base de G en une base de H, donc d'après le critère d'isomorphisme 1-5-2, u est un isomorphisme de G sur H.

Le cas de la dimension infinie est très révélateur d'une complexité croissante.

Considérons par exemple le $E = \mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. E est de dimension infinie (cf paragraphe 2.4). Soit maintenant $F = X\mathbb{K}[X]$. Il est clair que F est un sev de E.
Soient $G_1 = \{P \in E \mid P \text{ constant}\}$ et $G_2 = \mathrm{Vect}(\{X+1\})$.

1. G_1 est un supplémentaire de F dans E : en effet, tout polynôme $P \in E$ peut s'écrire sous la forme $P = (P - P(0)) + P(0)$. $P - P(0) \in F$ et $P(0) \in G_1$, donc $E \subset F + G_1$. L'inclusion inverse étant évidente, on a $E = F + G_1$.
   De plus, $F \cap G_1 = \{0_E\}$: en effet, soit $P \in F \cap G_1$, alors $P(0) = 0$ et comme P constant, P est identiquement nul.
2. G_2 est un supplémentaire de F dans E : en effet, tout polynôme $P \in E$ peut s'écrire sous la forme $P = (P - P(0)(X+1)) + P(0)(X+1)$. $P - P(0)(X+1) \in F$ (facile) et $P(0)(X+1) \in G_2$, donc $E \subset F + G_2$. L'inclusion inverse étant évidente, on a $E = F + G_2$.
   De plus, $F \cap G_2 = \{0_E\}$: en effet, soit $P \in F \cap G_2$, alors P est de la forme $k(X+1)$ et $P(0) = 0$, d'où $k = 0$ puis $P = 0_E$.
3. Et pourtant, G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes. En effet, $\dim(G_1) = 1$ et $\dim(G_2) = 2$.

Pour mesurer le "défaut de somme directe", nous avons le :

Théorème 2-2-6 (Théorème de Grassmann) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et F, G deux sev de E tels que $E = F + G$. Alors : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Démonstration : Nous donnons ici deux démonstrations de ce résultat fondamental.

1. <u>Démonstration 1</u> : Soit $B_1 = (e_1, \dots, e_r)$ une base de $F \cap G$ que l'on complète en une base $B_F = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_p)$ de F et en une base $B_G = (e_1, \dots, e_r, g_1, \dots, g_q)$ de G. Ainsi, $\dim(F \cap G) = r$, $\dim(F) = r + p$ et $\dim(F) = r + q$.
   Prouvons que $B = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une base de E.
   Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q$ des scalaires tels que :
   $$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j + \sum_{k=1}^{q} \nu_k g_k = 0$$
   Alors :
   $$\underbrace{\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j}_{\in F} = \underbrace{-\sum_{k=1}^{q} \nu_k g_k}_{\in G} \in F \cap G$$

Donc il existe des scalaires $\lambda'_1, \dots, \lambda'_r$ tels que

$$-\sum_{k=1}^{q} \nu_k g_k = \sum_{i=1}^{r} \lambda'_i e_i$$

i.e :

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda'_i e_i + \sum_{k=1}^{q} \nu_k g_k = 0$$

Comme $(e_1, \dots, e_r, g_1, \dots, g_q)$ est une base de G, on a $(\forall i \in [\![1; r]\!])$ $\lambda'_i = 0$ et $(\forall k \in [\![1; q]\!])$ $\nu_k = 0$. D'où : $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j f_j = 0$.
Comme $(e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_p)$ est une base de F, on a $(\forall i \in [\![1; r]\!])$ $\lambda_i = 0$ et $(\forall j \in [\![1; p]\!])$ $\mu_j = 0$.
Ainsi, $B = (e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_q)$ est une famille libre de E. Comme $E = F + G = \mathrm{Vect}(F \cup G)$, B est aussi une famille génératrice de E. C'est donc une base de E.
Mais alors, $\dim(E) = r+p+q = (r+p)+(r+q)-r = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F \cap G)$.

2. <u>Démonstration 2</u> : Cette dernière repose sur le théorème du rang vu au paragraphe d'après. Son avantage : la rapidité !
Considérons l'application linéaire u : $\begin{cases} F \times G \to E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$
D'après le théorème du rang : $\dim(F \times G) = \mathrm{rang}(u) + \dim \ker(u)$.
Or $E = F + G$, donc u est surjective, et donc $\mathrm{rg}(u) = \dim(E)$.
Par ailleurs, $\dim(F \times G) = \dim(F) + \dim(G)$,
Puis $\ker(u) = \{(x, y) \in F \times G \mid x + y = 0\} = \{(x, -x) \mid x \in F \cap G\}$.
$\ker(u)$ est clairement isomorphe à $F \cap G$, donc $\dim \ker(u) = \dim(F \cap G)$.
Finalement, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$.
D'où $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

2.3 Notion de rang d'une famille de vecteurs / d'une application linéaire

Définition 2-3-1 : Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E. On appelle **rang** de $\mathcal{F}$ la dimension de $\mathrm{Vect}(u_i)_{i \in I}$. On le notera $\mathrm{rg}(\mathcal{F})$.

Remarque : Le rang de $\mathcal{F}$ est en quelque sorte le nombre maximal de vecteurs linéairement indépendants de $\mathcal{F}$. En statistiques, on parlerait de *degrés de liberté*.
Nous travaillons ici en dimension finie, par conséquent le rang de toute famille de vecteurs sera nécessairement fini. Nous pouvons donc nous limiter à une famille finie $(x_1, \dots, x_p)$.

Proposition 2-3-2 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E.

1. $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq p$ et $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq n$ i.e $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) \leq \min(n, p)$.
2. $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$ ssi la famille est libre (donc forcément $p \leq n$).
3. $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = n$ ssi la famille est génératrice (donc forcément $n \leq p$).

Démonstration : Immédiat d'après la remarque précédente.

Corollaire 2-3-3 : $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E ssi $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = n$.

Proposition 2-3-4 : Le rang d'une famille $(x_1, \dots, x_p)$ est **invariant** par les **transformations élémentaires** suivantes :

1. permutation des vecteurs x_i.
2. multiplication d'un vecteur par un scalaire non nul.
3. addition à un vecteur d'une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Application :

1. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérons la famille infinie de fonctions $(f_h)_{h\in\mathbb{R}}$ de E (lui aussi de dimension infinie). Alors $(f_h)_{h\in\mathbb{R}}$ est de rang 2 dans E.
2. Dans un ev, soient n vecteurs constituant un système de rang r. On en extrait p vecteurs formant un système de rang s. Alors $r \leq s + n - p$.

Définition 2-3-5 : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, avec E de dimension finie et $u \in L(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\ker(u))$$

où $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{im}(u))$.

Démonstration : Soient $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\ker(u)$ que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Posons $E' = \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ de sorte que $E = \ker(u) \oplus E'$.
Une application linéaire étant entièrement déterminée par ses restrictions à des sev supplémentaires, il suffit de prouver que E' et $\mathrm{im}(u)$ sont isomorphes.

Considérons l'application linéaire $v : \begin{cases} E' \to \mathrm{im}(u) \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$

- v injective ? Soit $x \in \ker(v)$. Alors $x \in E'$ et $v(x) = u(x) = 0_F$. Comme $E' \cap \ker(u) = \{0_E\}$ et que $0_E = 0_{E'}$, on a $x = 0_{E'}$. Donc v injective.
- v surjective ? Soit $y \in \mathrm{im}(u)$: $(\exists x \in E)\ y = u(x)$. Or $E = \ker(u) \oplus E'$, donc $\exists!(x_K, x_{E'}) \in \ker(u) \times E'$; $x = x_K + x_{E'}$. D'où $u(x) = u(x_K) + u(x_{E'}) = u(x_{E'})$. Comme $x_{E'} \in E'$, on a $u(x_{E'}) = v(x_{E'})$. D'où $y = v(x_{E'})$ et v surjective.

Ce théorème donne toute sa mesure à l'aide de la notion d'espace vectoriel quotient que nous détaillerons dans un prochain papier.

Remarque et applications :

1. ATTENTION ! On ne dit surtout pas que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{im}(u)$.
2. Comme vu précédemment, nous pouvons utiliser ce théorème pour retrouver la formule de Grassmann.
3. Nous pouvons également retrouver le fait qu'en dimension finie, si $u \in L(E)$, alors u bijective ssi u injective ssi u surjective.
4. Soient $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$. Alors :
   (a) Si v est de rang fini, alors $v \circ u$ aussi et $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(v)$.
   (b) Si u est de rang fini, alors $v \circ u$ aussi et $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \mathrm{rg}(u)$.
   (c) Si u et v sont de rangs finis, alors $v \circ u$ aussi et $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

2.4 Le cas de la dimension infinie

Nous ne traitons ici que le problème de l'existence de bases en dimension infinie.

Un premier exemple d'espace vectoriel de dimension infinie est par exemple $E = \mathbb{K}[X]$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Démonstration : Supposons par l'absurde que $E = \mathbb{K}[X]$ soit de dimension finie. Il existe alors une famille $G = (P_i)_{1\leq i\leq n}$ de polynômes (que l'on peut supposer de degrés échelonnés) engendrant E. Notons $p_i = \deg(P_i)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$.
X^{p_n+1} ne peut être une combinaison linéaire des P_i, sinon, il existerait $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $X^{p_n+1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda P_i$. D'où $\deg(X^{p_n+1}) = p_n + 1 = \deg\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda P_i\right) \leq p_n$. Absurde !

Théorème 2-4-1 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E n'est pas de dimension finie
2. Il existe dans E une famille libre infinie.

Exemples : Nous en avons déjà rencontré.

1. L'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $E = \mathbb{K}$.
2. L'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ nulles à partir d'un certain rang.
3. L'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
4. L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le note aussi $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemples :

1. $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre infinie (et même une base) de $\mathbb{K}[X]$.
2. Posons $e_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$, $e_1 = (0, 1, 0, 0, \dots)$, etc. La famille infinie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, mais pas de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
3. Soit $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$ la suite infinie des nombres premiers. Alors la famille $(\ln(p_1), \ln(p_2), \dots)$ est $\mathbb{Q}$-libre dans le $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$.

Théorème 2-4-2 (existence de bases) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie.

1. E admet une base.
2. Toute famille libre de E peut être complétée en une base.
3. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base.
4. Tout sev F admet au moins un supplémentaire.

Démonstration : Nous allons utiliser le lemme de Zorn.

1. Notons $\mathcal{L}$ l'ensemble des parties libres de E, ordonné par inclusion (c'est donc un ordre partiel). Soit $(L_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée d'éléments de $\mathcal{L}$. Alors $L = \bigcup_{i\in I} L_i$ est un élément de $\mathcal{L}$: en effet, soit $\{i_1, \dots, i_n\}$ une partie finie de I. Sans perte de généralité, puisque $(L_i)_{i\in I}$ est une famille totalement ordonnée, on peut supposer $L_{i_1} \subset L_{i_2} \subset \cdots \subset L_{i_n}$. Donc s'il existe des scalaires $\lambda_1, \dots \lambda_n$ et des vecteurs

$x_j \in L_{i_j}$ tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0$, alors comme L_{i_n} est libre, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. De plus, par construction, L est un majorant de $\mathcal{L}$: $(\forall i \in I)\ L_i \subset L$.
Donc d'après le lemme de Zorn, $\mathcal{L}$ admet au moins un élément maximal B pour l'inclusion.
Cet élément est une base, car sinon on pourrait trouver un vecteur $x \notin \mathrm{Vect}(L)$ et alors $L \cup \{x\}$ serait encore libre. Absurde par maximalité de L.

2. Le même argument montre que si $L \subset G$, où L est une partie libre et G une partie génératrice, il existe une base B telle que $L \subset B \subset G$. C'est le théorème de la base incomplète.
3. On peut compléter une base de F en une base de E.

Remarque : En dimension infinie, on peut très bien avoir deux ev isomorphes tels que l'un d'eux contient strictement l'autre.
Considérons par exemple $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = X\mathbb{K}[X]$. On a $F \subsetneq E$, et pourtant $E \sim F$.
Il suffit en effet de constater que $u : \begin{cases} E \to F \\ P \mapsto XP \end{cases}$ est bien un isomorphisme de E sur F.

Théorème 2-4-3 (équipotence des bases) : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension infinie. Toutes les bases sont équipotentes.

La démonstration est admise.

2.5 Synthèse : définir correctement la dimension d'un ev de dimension finie.

Nous considérons ici un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n : E est de dimension finie si E admet une famille génératrice finie. Sinon E est dit de dimension infinie.
Nous supposons connues les notions de familles libres, génératrices et de bases.
Nous connaissons en particulier la caractérisation d'une base :
$\mathcal{B}$ est une base de E ssi $\mathcal{B}$ est une famille génératrice minimale ssi $\mathcal{B}$ est une famille libre maximale.

Voici les résultats fondamentaux de définition de la dimension d'un ev de **dimension finie** :

1. Remplacer un vecteur (**lemme d'échange**) : Si b est combinaison linéaire d'éléments de $X \cup \{a\}$ avec un coefficient non nul sur a, alors $\mathrm{Vect}(X \cup \{a\}) = \mathrm{Vect}(X \cup \{b\})$
2. Lemme fondamental : Si un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admet une famille génératrice de n vecteurs, alors toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.
3. **Théorème d'existence de bases** (se base sur l'algorithme de la base incomplète) : Soit G une famille génératrice finie de E et L une famille libre de E incluse dans G. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $L \subset \mathcal{B} \subset G$.
4. On déduit du théorème précédent la version pratique suivante :
   (a) **Théorème de la base incomplète** : Toute famille libre de E peut être complétée en une base finie de E.
   (b) **Théorème de la base extraite** : De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base finie de E.

   En particulier, E possède une base finie.
5. **Théorème-définition** : Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Toutes les bases de E ont le même cardinal qu'on appelle la **dimension** de E. On la note $\dim(E)$.
   Si $E = \{0_E\}$, on décide par convention que $\dim(E) = 0$.

3 Quelques applications plus poussées

Les présentes applications ne sont que quelques pistes, laissées en exercice au lecteur (à la lectrice), bien loin de couvrir le sujet. Nous détaillerons leur résolution dans un prochain article portant sur les applications de la dimension finie en algèbre et en analyse. La plupart sont cependant ultra-classiques et sont traités dans la plupart des ouvrages de niveau L3.

3.1 Applications en algèbre

Les deux premiers items concernent la structure d'espace vectoriel ; les suivants se concentrent spécifiquement sur la notion de dimension.

1. Soit V un $\mathbb{Q}$-ev de dimension finie et $f : V \to V$ une application $\mathbb{Q}$-linéaire telle que $f^3 = 2id_V$. On choisit une racine α de $P = X^3 - 2$ dans $\mathbb{C}$. Alors V est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{Q}[\alpha]$-ev. En déduire que 3 divise $\dim_{\mathbb{Q}}(V)$.
2. Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps d'un corps commutatif $\mathbb{L}$ et E un espace vectoriel non nul. Les propositions suivantes sont équivalentes :
   (a) Il existe sur E une structure de $\mathbb{L}$-ev qui induit la structure de $\mathbb{K}$-ev.
   (b) Il existe un morphisme injectif de $\mathbb{K}$-algèbre de $\mathbb{L}$ dans $L_{\mathbb{K}}(E)$ envoyant 1 sur id_E.

   Que dire de $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ si E est un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie ?
3. Indice de Fitting
4. Théorème de Skolem-Noether
5. Lemme de Brauer

3.2 Applications en analyse

Des résultats importants

1. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, $K \subset E$ est compact si et seulement si K est fermé et borné.
2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
3. Théorème de projection sur un convexe fermé et méthode de Galerkin.
4. Tout opérateur compact est limite d'opérateurs de rang fini.
5. Méthode des moindres carrés en statistiques.
6. Théorème des extrema liés.
7. Soit (E, d) un $\mathbb{C}$-espace vectoriel métrique complet séparable[2], S une partie dénombrable dense de E et $A \in \mathcal{L}_c(E)$.
   Un point $x \in E$ est dit *hypercyclique* pour A lorsque l'orbite $\{A^n(x); n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. L'ensemble des points hypercycliques pour A est noté $HC(A)$.
   Si E est de dimension finie, alors $HC(A) = \emptyset$.
8. **Théorème de Grothendieck (mon développement personnel !)** : Soit $I =]0; 1[$ et $p \in [1; +\infty[$. Soit $S \subset L^p(I)$ un sous-espace vectoriel fermé. On suppose que $S \subset L^\infty(I)$. Alors S est de dimension finie.

2. un espace métrique est dit séparable s'il admet une partie dénombrable dense

4 Annexes

4.1 Ensembles ordonnés et lemme de Zorn

Définition 4-1-1 :

1. Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** sur E si :
   — $\mathcal{R}$ est réflexive : $(\forall x \in E)\ x\mathcal{R}x$
   — $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $(\forall x, y \in E)\ x\mathcal{R}y \ \wedge\ y\mathcal{R}x \implies x = y$
   — $\mathcal{R}$ est transitive : $(\forall x, y, z \in E)\ x\mathcal{R}y \ \wedge\ y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$
2. Le couple $(E, \mathcal{R})$ est appelé **ensemble ordonné**. On posera souvent $\leq$ pour $\mathcal{R}$.
3. $(E, \mathcal{R})$ est dit **totalement ordonné** si $(\forall x, y \in E)\ x \leq y \ \vee\ y \leq x$: 2 éléments de E sont toujours comparables. Si ce n'est pas le cas, on dit que E est **partiellement ordonné**.
4. Soit $A \subset E$. On dit que $c \in E$ est UN **majorant** de A si $(\forall x \in A)\ x \leq c$.
5. On dit que $m \in E$ est UN **élément maximal** de E si pour tout $x \in E$ tel que $m \leq x$, on a nécessairement $x = m$.
6. On dit que E est **inductif** si tout sous-ensemble totalement ordonné de E admet un majorant.

Lemme de Zorn : Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.

4.2 Opérations de groupes

Définition 4-2-1 : Soit G un groupe de neutre 1 et E un ensemble. On dit que **le groupe** G **opère sur l'ensemble** E s'il existe une loi externe $* \ :\ G \times E \to E,\ (g, x) \mapsto g * x$ telle que :

1. $(\forall x \in E)\ 1 * x = x$
2. $(\forall g, g' \in G)(\forall x \in E)\ g * (g' * x) = (gg') * x$

On dit alors que E est un G-ensemble.

Proposition 4-2-2 : Soit G un groupe de neutre 1 et E un ensemble. G opère sur E si et seulement s'il existe un morphisme de groupes ϕ de G sur $(S(E), \circ)$.

Démonstration :

1. Supposons que le groupe G agisse sur l'ensemble E. Notons * la loi externe définie sur $G \times E$ à valeurs dans E. Définissons $\phi : \begin{cases} G \to E^E \\ g \mapsto \phi(g) \end{cases}$ où $(\forall x \in E)\ \phi(g)(x) = g * x$.
   Prouvons que $(\forall g \in G)\ \phi(g)$ est une bijection de E dans E i.e $\phi(g) \in S(E)$.
   (a) Commençons par remarquer que puisque $(\forall x \in E)\ 1 * x = x$, on a $\phi(1) = id_E$.
   (b) De plus, $(\forall g \in G)\ \phi(gg^{-1}) = \phi(g^{-1}g) = \phi(1) = id_E$.
   Or comme $(\forall x \in E)\ x = 1 * x = (g^{-1}g) * x = g^{-1} * (g * x)$, on a donc $\phi(g^{-1}) \circ \phi(g) = id_E$. De même $\phi(g) \circ \phi(g^{-1}) = id_E$. Donc $(\forall g \in G)$, $\phi(g) \in S(E)$ et $\phi(g)^{-1} = \phi(g^{-1})$.
   (c) Enfin, $(\forall g, g' \in G)(\forall x \in E)\ g * (g' * x) = g * (\phi(g')(x)) = \phi(g)(\phi(g')(x)) = \phi(g) \circ \phi(g')(x)$ d'une part, et $\phi(gg')(x) = (gg') * x = g * (g' * x)$ d'autre part. Donc $\phi(gg') = \phi(g) \circ \phi(g')$. Ainsi, ϕ est un morphisme de $(G, .)$ sur $(S(E), \circ)$.

2. Réciproquement, soit ϕ un morphisme de $(G,.)$ sur $(S(E),\circ)$.
   On a donc $\phi(1) = id_E$. Posons pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in E$, $g * x = \phi(g)(x)$.
   (a) Comme $\phi(1) = id_E$, on a $(\forall x \in E)\ 1 * x = \phi(1)(x) = x$.
   (b) De plus, $(\forall g, g' \in G)\ \phi(gg') = \phi(g) \circ \phi(g')$. Donc $(\forall x \in E)\ (gg') * x = \phi(gg')(x) = (\phi(g) \circ \phi(g'))(x) = \phi(g)(\phi(g')(x)) = \phi(g)(g' * x) = g * (g' * x)$.

Remarque : Cette équivalence de définition permet de considérer une action de groupes de deux façons, l'une ou l'autre étant plus ou moins utile selon le contexte.

Définition 4-2-3 :

1. Le sous-ensemble de E : $G * x = \{g * x \mid g \in G\}$ s'appelle l'**orbite** de x sous l'action de G.
2. Soit $x \in E$. On appelle **stabilisateur de** x le sous-groupe de G (exercice) défini par : $St_x = \{g \in G \mid g * x = x\} = \{g \in G \mid \phi(g)(x) = x\}$.

Définition 4-2-4 : Soit E un G-ensemble.

1. On dit que G agit **transitivement** sur E (ou que l'action de G sur E est transitive) s'il n'existe qu'une seule orbite i.e $(\forall x, y \in E)(\exists g \in G)\ y = g * x$.
2. Une action est dite **libre** si tous les stabilisateurs sont réduits au neutre de G.
3. Une action est dite **fidèle** si l'intersection de tous les stabilisateurs est réduite au neutre

4.3 Anneaux, corps

Définition 4-3-1 : Soit A un ensemble muni de 2 lois de composition interne $+$ et $.$ telles que :

1. $(A,+)$ soit un groupe commutatif (on notera 0 son neutre).
2. $.$ est distributive par rapport à $+$: $\forall x, y, z \in A\ :\ x.(y+z) = x.y + x.z$
3. $.$ possède un élément neutre distinct de 0. On le notera 1_A. $\forall x \in A\ :\ 1_A.x = x.1_A = x$

$(A,+,.)$ est appelé **anneau**.
Si de plus la seconde loi $.$ est commutative, on parle d'anneau commutatif.
Tout élément inversible pour la seconde loi $.$ s'appelle une **unité** de A.
Si tous les éléments non nuls de A sont inversibles, on dit que l'anneau $(A,+,.)$ est un **corps**.

Remarque : Certains auteurs ne gardent que les points 1 et 2 pour définir un anneau. En rajoutant le point 3, ils parlent alors d'anneaux unitaires (ou unifères). Nous décidons ici que tous les anneaux sont unitaires.

Définition 4-3-2 : Soient A et B deux anneaux (unitaires par convention). On dit qu'une application $\phi : A \to B$ est un **morphisme d'anneaux** si :

1. $\forall x, y \in A\ :\ \phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$ et $\phi(x.y) = \phi(x).\phi(y)$
2. $\phi(1_A) = 1_B$

Nous noterons désormais xy pour $x.y$ et 1 pour 1_A.

4.4 Bibliographie / Webographie

Les ressources internet sont nombreuses et riches, mais quatre m'ont particulièrement tapé dans l'œil :

1. La chaine Youtube Maths adultes, de Gilles Bailly-Maitre, professeur à l'université de la Rochelle. Très pédagogique et pleine de bonne humeur : `https://www.youtube.com/watch?v=AFdeofSJEW0&list=PLE8WtfrsTAimNyRsaB2kLZqKvykuliUAr`
2. les cours de Christophe Bertault, professeur de MPSI au lycée Saint-Louis : `http://christophebertault.fr/`
3. les cours d' Alain Troesch, professeur de MP au lycée Lakanal : `http://alain.troesch.free.fr/`
4. les cours de Pierre-Jean Hormière, professeur de chaire supérieure retraité. Une vraie mine de savoir ! Hélas, le site n'est plus en ligne.

La littérature est aussi abondante, mais j'ai retenu :

1. P. Caldero - J. Germoni - Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométrie I - Calvage & Mounet (2019)
2. F. Cognet - Algèbre linéaire - Bréal (2000)
3. G. Diaz-Toca - H. Lombardi - C. Quitté - Modules sur les anneaux commutatifs - Calvage & Mounet (2014)
4. R. Goblot - Algèbre linéaire - Masson (1995)
5. **S. Roman - Advanced Linear Algebra (Third Edition) - Springer (2008)**