Probabilités conditionnelles

Introduction à la pensée bayésienne : partie 1

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 10, 2024

Les sentiers mathématiques : randonnée n°1

Plan du cours

Exemple 1

De la sueur coulait en abondance sur les fronts d'Alexandre et de Nino. Un jet, un seul petit jet de dés allait décider de leur sort dans quelques secondes. Le vieux Tony n'aimait pas que l'on manque à sa parole. Une date de créance, c'est sacré, et ça se respecte ! Ni avant, ni après, le jour même !

Le marché était simple : chacun à leur tour Alexandre et Nino allaient lancer deux dés honnêtes (comme Tony !). Si la somme des numéros obtenus était supérieure ou égale à 10, ils en étaient quitte pour un report d'une semaine, sinon ... couic !

Alexandre avait vite calculé leurs chances de sursis. Faire dix ou plus, c'est obtenir l'un des événements suivants :
$\{(4;6),(6;4),(5;5),(5;6),(6;5),(6;6)\}$ sur les 36 lancers possibles des deux dés. Ils avaient donc une chance sur six de s'en sortir.

Exemple 1

Nino s'y risqua en premier. Luigi, l'homme de main de Tony lui déclara un rictus à la bouche : "Ton premier dé a amené 2, t'as pigé ?". Nino devint livide. Avec cette information, la probabilité de faire au moins dix était devenue nulle, et donc celle de finir au fond des eaux troubles du Lez certaine !

Alexandre se lança à son tour, les yeux fermés. Luigi, l'air malicieux déclara : "Ton premier dé a amené 6". Alexandre pensa alors : "Ok ! Garde ton calme mon vieil Alex, t'as eu un 6, donc si ton autre dé a amené 4, 5 ou 6, t'es sauvé ! Ca te fait donc une chance sur deux de sursis".

Luigi, lentement, avec une patience réfléchie, dévoila alors la face du second dé : Et ce fut la ruine de 3 !

Exemple 1

Une situation de ce type prouve que si une **information supplémentaire** est donnée au cours du déroulement de l'expérience aléatoire, alors la probabilité qu'un événement donné se réalise "change", dans le sens où nous changeons de mesure de probabilité.

Notons A : "La somme des deux dés amène un total supérieur ou égal à 10", on a sous l'hypothèse d'équiprobabilité $P(A) = 1/6$.

Notons B l'événement : "Le premier dé a amené 2". Connaissant cette information, nous lirons probabilité que A se réalise sachant que B est réalisé et nous noterons $P_B(A) = 0$.

Notons C l'événement : "Le premier dé a amené 6". Connaissant cette information, nous lirons probabilité que A se réalise sachant que C est réalisé et nous noterons $P_C(A) = 1/2$.

1. Exemples introductifs

Exemple 1

Les applications P_B et P_C sont deux nouvelles mesures de probabilité sur Ω qui tiennent compte de la réalisation des événements B et C.

La question est : comment les définir précisément à partir de P ?

Mais d'abord comment se représenter le fait qu'un événement (notre information supplémentaire) soit réalisé au cours de notre expérience aléatoire ?

Exemple 2

Un jeu de 32 cartes (toutes indiscernable au toucher) est composé de 4 *couleurs* : pique, cœur, carreau et trèfle.
Chacune de ces couleurs comporte 8 cartes : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as. Nous appellerons *figures* les cartes : valet, dame, roi.

Vous tirez au hasard une carte de ce jeu et la donnez sans la regarder à un ami.

1. Calculez la probabilité de lui avoir donné un roi.
2. Votre ami vous dit que vous avez obtenu une figure. Calculez la probabilité que ce soit un roi.
3. Votre ami vous dit que vous avez obtenu un roi. Calculez la probabilité que ce soit un trèfle.

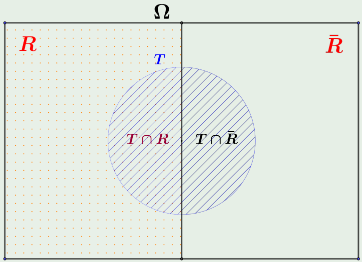
Exemple 2 : solution

1. Appelons R l'événement "Tomber sur un roi". Il y a 4 rois parmi les 32 cartes et nous sommes en situation d'équiprobabilité. Donc $P(R) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8} = 0,125$.
2. Appelons F l'événement : "Tomber sur une figure". Nous savons que cet événement est réalisé.
   Or il y a 4 rois parmi les 12 figures du jeu, donc par équiprobabilité : $P_F(R) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.
3. Appelons T l'événement "Tomber sur un trèfle". Cette fois-ci, vous savez que vous avez obtenu un roi. Or parmi les 4 rois, il n'y a qu'un seul roi de trèfle donc : $P_R(T) = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

Exemple 2 : remarque

Explicitons à l'aide d'un diagramme de Venn la situation de la question 3. L'univers Ω est **partitionné** en $\{R, \bar{R}\}$: $R \neq \emptyset$, $\bar{R} \neq \emptyset$, $\Omega = R \cup \bar{R}$ et $R \cap \bar{R} = \emptyset$. Savoir que R est réalisé fait qu'on "oublie" $\bar{R}$.

La probabilité de réalisation de T sachant R se calcule par $\dfrac{\text{Card}(T \cap R)}{\text{Card}(R)}$.



Exemple 2 : remarque

Tout est donc focalisé sur l'événement F : notre information partielle.

Nous noterons $P_F(R)$ la probabilité que l'événement R soit réalisé, sachant que F l'est.

Relions P_F à P :

$$P_F(R) = \frac{\mathrm{Card}(F \cap R)}{\mathrm{Card}(F)} = \frac{\mathrm{Card}(F)/\mathrm{Card}(\Omega)}{\mathrm{Card}(F)/\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$

Nous prouverons plus tard que P_F est une probabilité sur Ω.

Exercice 1

On a interrogé 1200 personnes partant en vacances. L'enquête leur a demandé leur lieu de séjour (la mer, la montagne ou la campagne) et leur classe d'âge : "Junior" (moins de 35 ans) ou "Sénior" (plus de 35 ans).

- 45% des personnes interrogées ont moins de 35 ans.
- 22% des personnes interrogées préfèrent la campagne.
- Parmi les moins de 35 ans, 310 préfèrent la mer et 120 préfèrent la montagne.
- Parmi les 35 ans et plus, 180 préfèrent la montagne.

1. Complétez alors le tableau à double-entrées qui suit :

	Mer	Campagne	Montagne	Total
Junior				
Sénior				
Total				1200

Exercice 1 (suite)

2. On prélève au hasard une personne.

   (a) Calculez la probabilité qu'elle ait moins de 35 ans.

   (b) La personne a moins de 35 ans. Calculez la probabilité qu'elle préfère la montagne.

   (c) La personne préfère la mer. Calculez la probabilité qu'elle ait plus de 35 ans.

   (d) Calculez la probabilité qu'elle ait plus de 35 ans et qu'elle préfère la campagne.

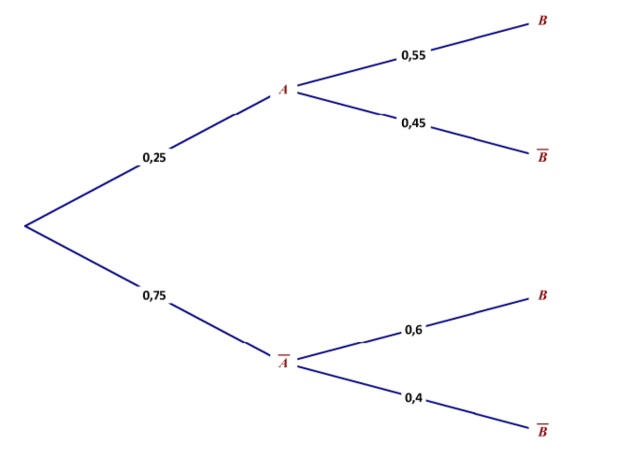
Exemple 3

Dans une certaine population, 25% des individus ont les yeux clairs. Parmi ceux-ci, 45% sont des hommes. Parmi les individus aux yeux foncés, il y a 60% de femmes.

1. Construisez un arbre de probabilités illustrant les données du texte. On notera A l'événement : "avoir les yeux clairs" et B l'événement : "être une femme".
2. Interprétez chaque branche de l'arbre.
3. On choisit au hasard un individu de cette population. Calculez la probabilité que :
   (a) L'individu choisi ait les yeux clairs.
   (b) L'individu choisi soit un homme aux yeux clairs.
   (c) L'individu choisi soit une femme sachant qu'elle a les yeux foncés.
   (d) L'individu choisi soit un homme.

Exemple 3 : solution

1. Les données du texte nous permettent de dresser l'arbre suivant :



Exemple 3 : solution

2. Les branches primaires supportent des probabilités usuelles : celles associées aux événements partitionnant l'univers Ω, ici A et $\bar{A}$. Les branches secondaires supportent des probabilités conditionnelles. Par exemple, la branche reliant A à B représente la probabilité d'être une femme (B) sachant qu'on a les yeux clairs (A).
3. Nous avons :

   (a) $P(A) = 0,25$ (lecture directe)

   (b) $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P_A(\bar{B}) = 0,25 \times 0,45 = 0,1125$

   (c) $P_{\bar{A}}(B) = 0,6$ (lecture directe)

   (d) On additionne la probabilité de toutes les branches menant à $\bar{B}$:
   $P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(A)P_A(\bar{B}) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4125$

Exercice 2

Toutes les probabilités seront données sous forme de fraction.

1. (a) En utilisant le tableau de contingence de l'exercice 1, créez un arbre de probabilités correspondant à une partition initiale des 1200 personnes interrogées en "Junior" et en "Sénior".

   (b) Calculez et interprétez la probabilité sur le segment reliant l'événement "Sénior" à l'événement "Mer".

   (c) On choisit au hasard une fiche parmi les 1200 réponses. Quelle est la probabilité de tomber sur une personne préférant la campagne ?

2. Créez de même un arbre de probabilités correspondant à une partition initiale des 1200 personnes interrogées en "Mer", "Campagne" et en "Montagne".

Définition 1

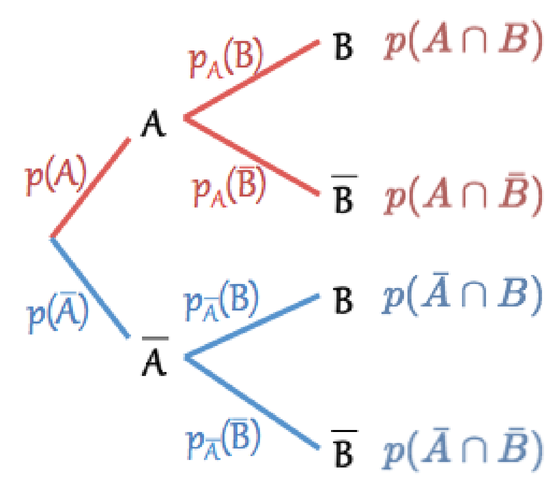
Soient A et B deux événements liés à une expérience aléatoire d'univers fini Ω. On suppose que $P(A) > 0$. On appelle probabilité que B soit réalisé, *sachant que* A l'est, le réel de $[0;1]$ noté $P_A(B)$ et défini par :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

P_A définit une nouvelle probabilité de Ω dans $[0;1]$ appelée **probabilité conditionnelle sachant** A. Elle quantifie la réalisation d'un événement sachant que l'événement A est réalisé.

Tout ce qui sort du périmètre de A n'est plus comptabilisé pour calculer la probabilité de réalisation de B.

Vers la formule des probabilités composées



2. Probabilités conditionnelles

Définition 2

Formule des probabilités composées :

1. Si $P(A) > 0$, on a :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P_A(B)}$$

2. Plus généralement, si $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) > 0$, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n+1}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots P_{A_1 \cap \dots A_n}(A_{n+1})$$

Remarque : La formule des probabilités composées n'est rien d'autre que la traduction de la propriété bien connue : "la probabilité d'une branche d'un arbre est égale au produit des probabilités des segments qui la constituent".

Définition 3

On appelle **système complet d'événements** une famille d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$

- non impossibles : pour tout i, $A_i \neq \emptyset$
- deux à deux incompatibles : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$
- et dont la réunion est l'événement certain : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

2. Probabilités conditionnelles

Définition 4

Formule des probabilités totales : Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ un système complet d'événements, avec pour tout i, $P(A_i) > 0$. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B)P(A_i)$$

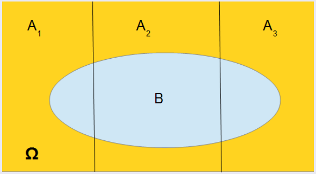
C'est un résultat très important dans la pratique. Dans les classes du secondaire, on l'applique en se basant sur un arbre de probabilités : on additionne les probabilités des branches de l'arbre passant par les A_i et de terminaison B.

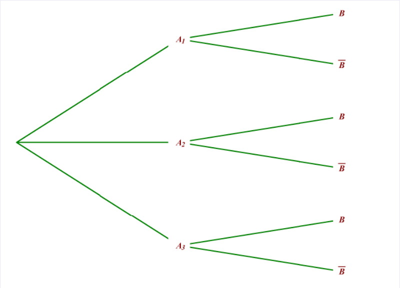
Il convient alors de choisir un système complet d'événements adapté au problème que l'on souhaite résoudre, en se basant bien sûr sur les informations dont on dispose.

Définition 4

Dans la figure ci-dessous, $\{A_1; A_2; A_3\}$ est un système complet d'événements, tous de probabilités non nulles. Pour tout événement B :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) \\ &= P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + P(A_3)P_{A_3}(B) \end{aligned}$$





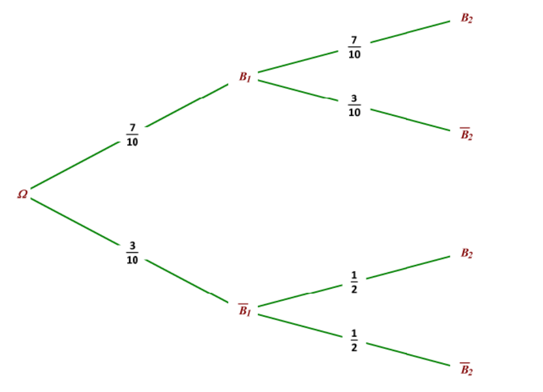
Exemple 4

On considère une urne contenant 7 boules bleues et 3 boules rouges toutes indiscernables au toucher. On tire une boule de cette urne. Si elle est bleue, on la remet dans l'urne ; si elle est rouge, on la remplace par 5 boules blanches prises dans une réserve auxiliaire. On tire alors une deuxième boule de cette urne.

Quelle est la probabilité qu'elle soit bleue ?

Exemple 4 : solution

Appelons B_i l'événement : "obtenir une boule bleue au i-ème tirage" ($i = 1, 2$). Les données de l'énoncé nous permettent de construire l'arbre de probabilités ci-dessous :



Exemple 4 : solution

Le but est de calculer $P(B_2)$. Facile à faire à l'aide de l'arbre de probabilités. Mais **il faut RÉDIGER !!!**

Vous allez voir, c'est très simple ...

$\{B_1, \bar{B}_1\}$ est un système complet d'événements, tous de probabilités non nulles, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\bar{B}_1)P_{\bar{B}_1}(B_2)$$

soit :

$$P(B_2) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{16}{25} = 0,64$$

2. Probabilités conditionnelles

Exercice 3

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent respectivement 3 boules blanches et 2 boules noires (resp. 2 boules blanches et 2 boules noires). On tire une boule de l'urne U_1 et on la place dans U_2. On tire alors une boule de U_2 et on la place dans U_1.

Quelle est la probabilité que les deux urnes aient gardé la même composition ?

Exercice 4

Information utile ou pas ?

Ma femme a les yeux clairs. Mes parents ont les yeux foncés mais ma sœur a les yeux clairs. On admet pour simplifier que le gêne clair est récessif et le gêne foncé dominant ; autrement dit un individu a les yeux clairs si ses deux parents lui ont transmis le gêne Clair, et il a les yeux foncés s'il possède au moins un gêne Foncé.

1. Sachant que j'ai les yeux foncés, quelle est la probabilité que ma fille ainée Juliette ait les yeux clairs ?
2. Juliette a les yeux clairs. Quelle est la probabilité que son petit frère Gildas ait aussi les yeux clairs ?
3. Même question en supposant que Juliette a les yeux foncés.

Définition 5

On dit que deux événements A et B sont **indépendants** si

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Attention : Ne pas confondre indépendance, notion définie à partir de la probabilité P, avec incompatibilité, où P n'intervient pas !

Remarque : Dire que deux événements A et B de probabilités non nulles sont **indépendants** signifie que $P_A(B) = P(B)$ ou que $P_B(A) = P(A)$. En effet, d'après la formule des probabilités composées on a TOUJOURS $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$. Mais rien n'assure que $P_A(B) = P(B)$!
C'est le cas si l'information "A est réalisé" n'apporte rien de plus sur la réalisation de B (relativement à la probabilité P).

Propriété

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A et B sont indépendants.
2. $\bar{A}$ et B sont indépendants.
3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

Exemple 5

Les événements A et B sont-ils indépendants dans les cas suivants ?

1. A : "tirer un roi" et B : "tirer un pique" dans un jeu de 52 cartes.
2. A : "obtenir une somme supérieure ou égale à 10" et B : "obtenir un couple de chiffres pairs" dans le lancer de 2 dés parfaits.

3. Événements indépendants

Exemple 5 : solution

1. Par équiprobabilité, $P(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$; $P(B) = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$. D'où $P(A)P(B) = \dfrac{1}{13} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{52}$.
   D'autre part, $A \cap B$ est l'événement "obtenir le roi de pique", donc $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$. Donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Ainsi A et B sont indépendants.
2. Comme vu à l'exemple 1, $P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
   $B = \{(i;j) \in [\![1;6]\!]^2$; i et j pairs$\}$, donc B possède $3 \times 3 = 9$ éléments. Par équiprobabilité : $P(B) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$.
   $A \cap B = \{(4,6);(6,4);(6,6)\}$ donc $P(A \cap B) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.
   $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

Introduction

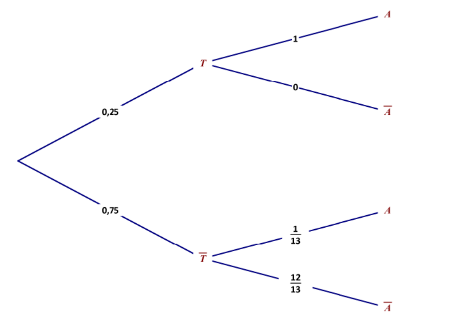
Á Las Vegas, il y a 25% de tricheurs aux cartes. Un tricheur est sûr de retourner un as si on lui présente un jeu de 52 cartes. On croise au hasard un joueur dans la rue et on lui demande de tirer une carte dans un jeu de 52 cartes. Il tire un as.

Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

Introduction

Analysons l'énoncé : celui-ci nous donne une partition initiale des joueurs de cartes à Las Vegas : les tricheurs (T) et les non-tricheurs ($\bar{T}$).
Appelons A l'événement : "l'individu retourne un as".

Par hypothèse, $P_T(A) = 1$ et $P_{\overline{T}}(A) = \dfrac{4}{52} = \dfrac{1}{13}$.



Introduction

La question consiste à calculer la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit un tricheur sachant qu'il a retourné un as, c'est-à-dire $P_A(T)$.

Si nous appelons conséquence l'événement A : avoir retourné un as, il s'agit de revenir à une cause possible, T : "l'individu est un tricheur".

Comment exprimer $P_A(T)$ en fonction des probabilités connues : $P(T)$, $P_T(A)$, $P_T(\overline{A})$, $P(\overline{T})$, $P_{\overline{T}}(A)$, $P_{\overline{T}}(\overline{A})$?

Remarque : Ceci revient en fait à considérer comme partition initiale de l'univers : $\{A, \overline{A}\}$ et non $\{T, \overline{T}\}$.

Introduction

La solution va venir des 2 formules fondamentales établies précédemment :

1. La formule des probabilités composées
2. La formule des probabilités totales

- Sous réserve que $P(A) > 0$, la première formule nous assure que $P_A(T) = \dfrac{P(A \cap T)}{P(A)} = \dfrac{P(T)P_T(A)}{P(A)}$.
- La seconde formule nous permet justement de prouver que $P(A) > 0$. Comme $\{T, \overline{T}\}$ est un système complet d'événements, tous de probabilités non nulles : $P(A) = P(T)P_T(A) + P(\overline{T})P_{\overline{T}}(A)$.

Ainsi, $P_A(T) = \dfrac{P(T)P_T(A)}{P(T)P_T(A) + P(\overline{T})P_{\overline{T}}(A)} = \dfrac{0,25 \times 1}{0,25 + 0,75/13} = \dfrac{13}{16}$.

4. Formule de Bayes

Définition 6

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)}}$$

Plus généralement, si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements où tous les $P(A_i) > 0$, et B de probabilité non nulle, alors pour tout $j \in [\![1; n]\!]$:

$$\boxed{P_{A_j}(B) = \frac{P(B)P_B(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}}$$

Exemple 6

Trois usines A, B et C produisent des pièces dont les proportions de défectueux sont respectivement 1%, 3% et 1,5%. Un magasin reçoit des pièces de chacune de ces usines en proportions respectives 40%, 50% et 10%. Une fois les pièces mélangées et stockées, on en prélève une au hasard.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité près de :

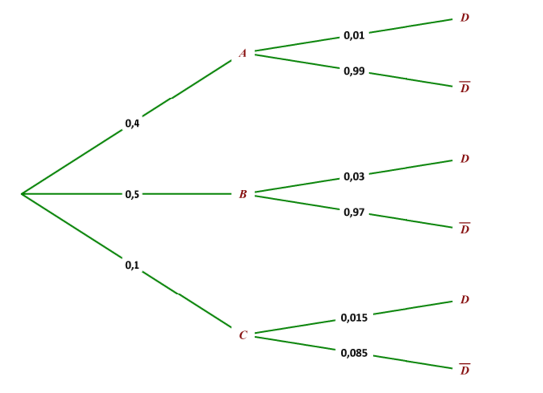
   (a) tomber sur une pièce de l'usine B.

   (b) tomber sur une pièce défectueuse.
3. La pièce prélevée est défectueuse. Calculez la probabilité qu'elle provienne de l'usine B.

Exemple 6 : solution

$\{A, B, C\}$ est un système complet d'événements, tous de probabilités non nulles. Appelons D l'événement : "la pièce est défectueuse".

1. L'arbre modélisant la situation :



Exemple 6 : solution

2. (a) $P(B) = 0,5$ par hypothèse.

   (b) D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A)P_A(D) + P(B)P_B(D) + P(C)P_C(D) \\ &= 0,4 \times 0,01 + 0,5 \times 0,03 + 0,1 \times 0,015 \\ &= 0,0185 \end{aligned}$$

3. Ici notre information est la réalisation de D. Nous cherchons $P_D(B)$.

   D'après la formule de Bayes : $P_D(B) = \dfrac{P(B)P_B(D)}{P(D)}$.

   D'où $P_D(B) = \dfrac{0,5 \times 0,03}{0,0185} \approx 0,81$.

5. Synthèse

Les méthodes

1. La première est de traduire toutes les données de l'énoncé à l'aide de probabilités et de probabilités conditionnelles.
2. Repérez rapidement les systèmes complets d'événements en jeu.
3. Représentez vos données sous la forme d'un arbre de probabilités si cela n'est pas trop lourd à faire.
4. Écrivez précisément ce que vous cherchez. Ceci vous guidera pour savoir quelle(s) formule(s) utiliser : formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.

6. Quiz de fin

Où l'on aborde toutes les notions gentiment

Une pandémie sévit dans une certaine région du globe. Un test de dépistage est disponible pour celle-ci, mais n'est pas fiable à 100%. Nous cherchons à déterminer si un individu prélevé au hasard dans la population est sain ou malade à l'aide de ce test.

Nous supposons que la probabilité pour un individu donné d'être malade est de 0,005.
La **sensibilité** (Se) est la probabilité qu'un test réalisé sur une personne malade se révèle positif.
La **spécificité** (Sp) est la probabilité qu'un test réalisé sur une personne saine se révèle négatif.

On note VP (resp. VN) la probabilité d'avoir un vrai positif (resp. un vrai négatif) et FP (resp. FN) la probabilité d'avoir un faux positif (resp. un faux négatif).

Où l'on aborde toutes les notions gentiment

1. La sensibilité d'un test est égale à :
(a) $\frac{VP}{VP+VN}$ (b) $\frac{VP}{FP+VN}$ (c) $\frac{VP}{VP+FN}$ (d) $\frac{VP}{FP+FN}$
2. la spécificité d'un test est égale à :
(a) $\frac{VN}{VP+VN}$ (b) $\frac{VN}{FP+VN}$ (c) $\frac{VN}{VP+FN}$ (d) $\frac{VN}{FP+FN}$
3. La sensibilité du test est estimée à 0,997. La probabilité qu'un individu aléatoire soit testé positif et soit malade est de :
(a) 0,0997 (b) 0,0499 (c) 0,00499 (d) 0,0055
4. La probabilité qu'un individu aléatoire soit testé négatif et soit sain est de 0,9552. La spécificité du test est de :
(a) 0,094 (b) 0,96 (c) 0,0095 (d) 0,9755
5. Un laboratoire effectue ce test sur 10 individus indépendants choisis aléatoirement. La probabilité qu'au moins un individu soit déclaré malade à l'issue des 10 tests est égale à :
(a) 0,0489 (b) 0,3677 (c) 0,6323 (d) 0,1385