Dénombrement

une introduction
Terminale spécialité maths

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

September 5, 2024

Les sentiers mathématiques : première randonnée

Introduction

Nous allons dans ce cours apprendre à répondre à des questions aussi diverses que :

1. À partir d'un alphabet de p lettres, combien de mots de n lettres peut-on former qui ne contiennent jamais deux lettres identiques ?
2. Combien un polygone à n côtés possède-t-il de diagonales ?
3. De combien de façons peut-on tirer 5 cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes ? Et successivement avec remise ? Et sans remise ?
4. Combien d'anagrammes le mot BOROROS possède-t-il ?
5. De combien de façons peut-on asseoir n personnes sur un banc rectiligne ? Autour d'une table ronde ?
6. Combien un ensemble fini de cardinal n possède-t-il de parties ?

Chacune de ces questions requiert un minimum de théorie mathématique, mais surtout beaucoup de bon sens. Soyez **CONCRETS** !

Introduction

Pour répondre à toutes ces questions, il faudra faire preuve de rigueur :

- en identifiant bien la nature du problème,
- en se représentant concrètement le problème,
- et enfin nous procéderons au dénombrement, c'est-à-dire au comptage, car dénombrer c'est compter !

Réunion, intersection et différence

Terminologie de base sur les ensembles

1. Un objet ou **élément** est une notion première, intuitive. Cela peut être un nombre, une conserve, un individu, etc. Les éléments jouent le rôle de *briques élémentaires* pour toute construction ultérieure.
2. Un **ensemble** est constitué de la collection des objets qui le composent. Ce peut être la population d'une ville, un ensemble de nombres : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, etc.
3. **Appartenance** : On dit qu'un élément x appartient à l'ensemble E si x fait partie de la collection d'éléments constituant E. On écrit $x \in E$. Dans le cas contraire, on écrit $x \notin E$.
4. **Inclusion de deux ensembles** : On dit que l'ensemble E est inclus dans l'ensemble F et on écrit $E \subset F$ si tout élément x appartenant à E, appartient aussi à F.

Réunion, intersection et différence

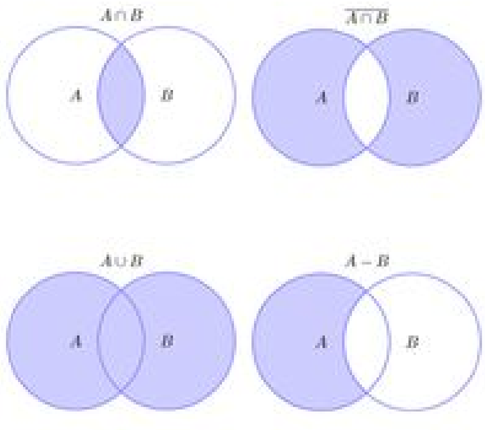
Réunion, intersection, complémentaire

1. Soient A et E deux ensembles. Si $A \subset E$, on dit que A est un **sous-ensemble** de E ou encore une **partie** de E.
2. Soient A et E deux ensembles. Si $A \subset E$, on appelle **complémentaire** de A dans E, et on note $\bar{A}$ ou $E \setminus A$ l'ensemble des éléments x de E qui n'appartiennent pas à A : $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$.
3. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle **intersection** de A et de B, et on note $A \cap B$ l'ensemble des éléments x de E appartenant à A **et** à B : $A \cap B = \{x \in E, x \in A \text{ et } x \in B\}$.
4. Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle **union** de A et de B, et on note $A \cup B$ l'ensemble des éléments x de E appartenant à A **ou** à B : $A \cup B = \{x \in E, x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Attention, ce "OU" est un "OU inclusif" : $A \cap B \subset A \cup B$.

Réunion, intersection et différence

On a l'habitude de représenter les ensembles par des diagrammes de Venn (ou patatoïdes).



Propriétés de $\bigcap$ et de $\bigcup$ - Cardinal d'un ensemble

Propriétés immédiates (admises)

A, B et C désignent trois sous-ensembles d'un ensemble de référence E.

1. **Commutativité** : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
2. **Associativité** : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Ce qui permet de noter $A \cap B \cap C$. Même chose avec la réunion.
3. **Distributivité** : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. **Complémentaire** : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Propriétés de $\bigcap$ et de $\bigcup$ - Cardinal d'un ensemble

Propriétés immédiates (admises)

A, B et C désignent trois sous-ensembles d'un ensemble de référence E.

1. **Commutativité** : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.
2. **Associativité** : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. Ce qui permet de noter $A \cap B \cap C$. Même chose avec la réunion.
3. **Distributivité** : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ et $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
4. **Complémentaire** : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Cardinal d'un ensemble

On appelle **cardinal** de l'ensemble E et on note $|E|$ ou $\mathrm{card}(E)$ le nombre d'éléments de E.

Dans ce cours, on ne considérera que des ensembles de cardinal fini.

Propriétés des cardinaux

Règles de calcul

1. Soient A et B deux ensembles. Alors : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. En particulier, si A et B sont *disjoints* (i.e $A \cap B = \emptyset$), alors $|A \cup B| = |A| + |B|$.
2. Soient A et B deux ensembles tels que $A \subset B$, alors : $|B| = |A| + |B \setminus A|$.

Exemple

On considère une classe de 32 élèves de Terminale. Deux sports sont proposés au lycée en activité scolaire : le basket ball et le badminton. 20 élèves pratiquent le basket ball et 15 le badminton. 5 élèves ne pratiquent aucune activité physique. Combien d'élèves pratiquent les deux activités ?

Propriétés des cardinaux

Le cas où plus de deux ensembles sont en jeu dispose lui aussi d'une formule générale (Hors programme). Nous nous contenterons juste d'un cas particulier en exercice. Cependant, vous devez connaître la :

Partition d'un ensemble

Définition : Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une famille de parties de E. On dit que $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une *partition* de l'ensemble E si :

- Chacune des parties A_i, $(1 \leq i \leq n)$ est non vide
- $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$
- Les A_i sont deux à deux disjoints : si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \emptyset$

Propriété : Si les sous-ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de l'ensemble E en forment une partition, alors $|E| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$.

Propriétés des cardinaux

Principe additif

La dernière propriété est connue sous le nom de **principe additif** : lorsque l'on doit faire un choix **ou (exclusif)** un autre **ou** un autre, etc., les possibilités s'additionnent.
De manière heuristique, on remplace les "ou" (exclusifs) par des $+$.

Exemple

On lance deux dés à 6 faces. Calculez le nombre de possibilités d'obtenir une somme supérieure ou égale à 16.

Réponse : obtenir une somme supérieure ou égale à 16, c'est obtenir une somme de 16 **OU (exclusif)** de 17 **OU (exclusif)** de 18. En énumérant explicitement chacun des cas disjoints envisagés, il y a :
$6 + 3 + 1 = 10$ possibilités.

Produit cartésien d'ensembles

Définition et propriété

1. Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** des ensembles E et F et on note $E \times F$ l'ensemble $E \times F = \{(x, y); x \in E, y \in F\}$. Si $E = F$, on note E^2 pour $E \times E$.
   Les éléments de $E \times F$ sont donc des **couples** d'éléments : le premier élément appartient à E et le second appartient à F.
2. Plus généralement, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles, le **produit cartésien** des ensembles E_1, ...,E_n est par définition l'ensemble $E_1 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n), x_i \in E_i, 1 \leq i \leq n\}$.
   Les éléments de $E_1 \times \cdots \times E_n$ sont des n-**uplets** d'éléments : le premier élément appartient à E_1, le second appartient à E_2, etc.
   Si $E_1 = \cdots = E_n = E$, on note E^n pour $E \times \cdots \times E$ (n fois).
3. **Propriété** : Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles, alors : $|E_1 \times \cdots \times E_n| = |E_1| \times \cdots \times |E_n|$.

Produit cartésien d'ensembles

Principe multiplicatif

La dernière propriété est connue sous le nom de **principe multiplicatif** : lorsque l'on doit faire un choix **et** un autre **et** un autre, etc., les possibilités se multiplient.
De manière heuristique, on remplace les "et" par des $\times$.

Produit cartésien d'ensembles

Principe multiplicatif

La dernière propriété est connue sous le nom de **principe multiplicatif** : lorsque l'on doit faire un choix **et** un autre **et** un autre, etc., les possibilités se multiplient.
De manière heuristique, on remplace les "et" par des $\times$.

Exemple

Un restaurant propose au choix 3 entrées, 3 plats et 2 desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?

Produit cartésien d'ensembles

Principe multiplicatif

La dernière propriété est connue sous le nom de **principe multiplicatif** : lorsque l'on doit faire un choix **et** un autre **et** un autre, etc., les possibilités se multiplient.
De manière heuristique, on remplace les "et" par des $\times$.

Exemple

Un restaurant propose au choix 3 entrées, 3 plats et 2 desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?

Réponse : un menu est constitué d'une entrée **et** d'un plat **et** d'un dessert. Le nombre de menus différents est donc égal à $3 \times 3 \times 2 = 18$.

Trois exemples pour comprendre

1. Un cadenas comporte 4 mollettes avec les chiffres de 0 à 9 et les lettres de A à E. Combien de codes différents peut-on constituer ?
2. Parmi les codes précédents, combien comportent des éléments tous distincts ?
3. Combien d'anagrammes distincts de MATHS peut-on constituer ?

p-listes, arrangements et permutations

Trois exemples pour comprendre

1. Un cadenas comporte 4 mollettes avec les chiffres de 0 à 9 et les lettres de A à E. Combien de codes différents peut-on constituer ?
2. Parmi les codes précédents, combien comportent des éléments tous distincts ?
3. Combien d'anagrammes distincts de MATHS peut-on constituer ?

Question 1 : un code est un 4-uplet de l'ensemble $E = \{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E\}$ qui est de cardinal 15. Il y a donc 15^4 codes différents (c'est le principe multiplicatif).
Remarque : **l'ordre compte et toutes les répétitions sont possibles**.
Question subsidiaire : et si le cadenas avait eu 6 mollettes ?

Question 2 : Cette fois-ci, les éléments constituant le code sont tous distincts. Nous avons donc 15 choix pour le premier élément, 14 choix pour le second, 13 choix pour le troisième et 12 choix pour le dernier. D'après le principe multiplicatif, le nombre de codes de longueur 4 avec tous les éléments distincts est de $15 \times 14 \times 13 \times 12 = 32760$.
Remarque : **l'ordre compte et aucune répétition n'est possible**.
Question subsidiaire : et si le cadenas avait eu 6 mollettes ? 15 mollettes ? 16 mollettes ?

Question 3 : Le mot MATHS est constitué de 5 lettres toutes distinctes. Le nombre d'anagrammes du mot MATHS est le nombre de mots de 5 lettres constitués avec les 5 lettres M, A, T, H, S. D'après le principe multiplicatif, il y en a donc : $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.
Remarque : **Là aussi, l'ordre compte et aucune répétition n'est possible**.

p-listes, arrangements et permutations

Définitions et propriétés.

E désigne un ensemble de cardinal $n \geq 1$.

1. Un <u>p-uplet</u> de E est un élément de E^p, i.e un élément de la forme $(x_1, \dots, x_p)$, où pour tout $i \in [\![1; p]\!], x_i \in E$.
   Ils sont au nombre de n^p.
2. Un <u>arrangement</u> de p éléments de E pris parmi n est un p-uplet de E dont tous les éléments sont distincts. On note A_n^p le nombre de p-uplets de E.
   Si $p \in [\![1; n]\!]$, on a : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$; si $p > n, A_n^p = 0$ et par convention $A_n^0 = 1$.
3. Une <u>permutation</u> est un n-arrangement d'éléments de E.
   Il y a $n(n-1)\dots 1$ permutations des éléments de E.

Nous allons voir de suite comment exprimer ces deux derniers produits à l'aide d'une notation agréable : la **notation factorielle**.

La factorielle

Définitions et propriétés

Soit n un entier naturel.

1. Si $n \geq 1$, on appelle **factorielle de** n, et on note $n!$ l'entier défini par $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
2. Si $n = 0$, on pose par convention $0! = 1$.
3. On a pour tout entier naturel n la relation de récurrence : $(n+1)! = (n+1)n!$.

Exemples

1. $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
2. $6! = 1 \times 2 \times \cdots \times 6 = 720$.
3. Si $p \in [\![1; n]\!]$, le nombre d'anagrammes du mot CAHIER est de $6! = 720$.

La factorielle

La notation factorielle permet de réécrire agréablement le nombre de permutations et d'arrangements de p éléments pris parmi n.

dénombrement des arrangements et des permuattions

1. Le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est égal à $1 \times 2 \times \cdots \times n$, soit $n!$.
2. Si $p \in [\![1; n]\!]$, le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n est : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$, soit :

La factorielle

La notation factorielle permet de réécrire agréablement le nombre de permutations et d'arrangements de p éléments pris parmi n.

dénombrement des arrangements et des permuattions

1. Le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est égal à $1 \times 2 \times \cdots \times n$, soit $n!$.
2. Si $p \in [\![1; n]\!]$, le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n est : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$, soit :

$$A_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

La factorielle

La notation factorielle permet de réécrire agréablement le nombre de permutations et d'arrangements de p éléments pris parmi n.

dénombrement des arrangements et des permuattions

1. Le nombre de permutations d'un ensemble E de cardinal n est égal à $1 \times 2 \times \cdots \times n$, soit $n!$.
2. Si $p \in [\![1; n]\!]$, le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n est : $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$, soit :

$$A_n^p = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)(n-p)(n-p-1)\dots 1}{(n-p)(n-p-1)\dots 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Les calculatrices permettent directement dans leurs menus de déterminer la factorielle d'un entier (pas trop grand) ou le nombre d'arrangements de p éléments pris parmi n.

La factorielle

Un anagramme sympathique

La question est la suivante : quel est le nombre d'anagrammes (i.e de permutations différentes des lettres) du mot GEOMETRIQUEMENT ?

La factorielle

Un anagramme sympathique

La question est la suivante : quel est le nombre d'anagrammes (i.e de permutations différentes des lettres) du mot GEOMETRIQUEMENT ?

Si toutes les lettres de ce mot étaient distinctes, la réponse serait claire : 15! (le mot comporte 15 lettres). Mais ce n'est pas le cas. Il y a 4 E, 2 M et 2 T, les 7 autres lettres étant toutes distinctes.

Notons provisoirement les E : E_1, E_2, E_3, E_4, les M : M_1, M_2 et les T : T_1, T_2 de manière à distinguer chaque lettre. Il y a bien 15! anagrammes du mot $GE_1OM_1E_2T_1RIQUE_3M_2E_4NT_2$.

Mais permuter les E entre eux (de 4! façons), les M et les T entre eux (chacun de 2! façons) nous amène au même mot une fois les numéros effacés.

Conclusion : il y a $\dfrac{15!}{4!2!^2}$ anagrammes de GEOMETRIQUEMENT.

Combinaisons

La notion de **combinaison**, au contraire des précédentes, ne fait pas intervenir la notion d'ordre. Dans un premier temps, et c'est là même sa définition, nous allons la considérer comme le cardinal d'un ensemble de parties d'un ensemble donné.

Définitions et premières propriétés

1. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. On appelle **combinaison** de p éléments pris parmi n le nombre de parties à p éléments de E.

   On note $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons de p éléments de E pris parmi les n éléments de E.
2. Si $|E| = 0$, nécessairement, $E = \emptyset$.
3. Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Combinaisons

Un premier exemple

Soit $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Dénombrez toutes les parties de E.

Nous allons classer les parties de E selon leur cardinal :

Combinaisons

Un premier exemple

Soit $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Dénombrez toutes les parties de E.

Nous allons classer les parties de E selon leur cardinal :

1. L'unique partie à 0 éléments : $\emptyset$.
2. Les parties à 1 élément (singletons) : $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$.
3. Les parties à 2 éléments : $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$.
4. Les parties à 3 éléments : $\{0, 1, 2\}, \{0, 1, 3\}, \{0, 2, 3\}\{1, 2, 3\}$.
5. L'unique partie à 4 éléments : $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

Au total, E possède $2^4 = 2^{|E|} = 16$ parties.

Ce cas est général comme nous le verrons, mais quelle est la formule donnant exactement $\binom{n}{p}$?

Combinaisons

Théorème

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Combinaisons

Théorème

Soient $n, p \in \mathbb{N}$, alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Donnons l'idée de la démonstration. Considérons un alphabet constitué uniquement des lettres A et B. Si l'on note 1, 2, ..., n les places associées aux lettres du mot, alors le nombre de parties de $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ à p éléments est exactement le nombre d'anagrammes des mots de longueur n constitués de p lettres A (et donc de $n - p$ lettres B), i.e $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Combinaisons

Propriétés

1. Soient n et p deux entiers naturels. Alors : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. Soient n et p deux entiers naturels. Alors : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (formule de Pascal).
3. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Alors : $\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ (formule du capitaine).

Propriétés

1. Soient n et p deux entiers naturels. Alors : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
2. Soient n et p deux entiers naturels. Alors :
$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ (formule de Pascal).
3. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Alors :
$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ (formule du capitaine).

Nous démontrerons ces formules en exercice, et notamment l'application de la seconde (formule de Pascal) au développement des expressions de la forme $(a+b)^n$.

Combinaisons

Applications

Contrairement aux p-listes et aux arrangements (donc a fortiori aux permutations), la notion de combinaison ne fait PAS appel à la notion d'ordre. Retenez donc :

$$\textbf{Combinaisons} = \textbf{PAS d'ordre}.$$

1. On tire au hasard p boules distinctes dans une urne en contenant n ($n \geq p$). Alors le nombre de tirages distincts est égal à $\binom{n}{p}$.
2. On tire au hasard 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. Le nombre de "mains" de 13 cartes prises parmi 52 est de $\binom{52}{13} \approx 6,35 \times 10^{11}$.

Synthèse

Résumé des cas

Selon la situation, vous serez dans une des cases du tableau.
Et amenés à utiliser les principes multiplicatifs et/ou additifs.

	Avec répétitions	Sans répétition
L'ordre compte	p-listes	Arrangements
L'ordre ne compte pas	Hors programme	Combinaisons