

DÉNOMBREMENT

Dénombrer, c'est compter.

Pour dénombrer la population d'un pays, on fait appel au recensement. Nous répertorions donc les individus un par un. Tâche fastidieuse et relativement coûteuse. Il existe d'autres moyens pour estimer la taille d'une population (par exemple la méthode de capture-recapture utilisée en écologie).

Les méthodes que nous allons aborder à présent nous permettent de calculer exactement le nombre d'individus d'un ensemble donné.

Dans toute la suite, on supposera que l'ensemble E que l'on étudie possède un nombre fini d'éléments. On dira que E est de **cardinal fini**. On notera $\text{Card } E$ le nombre d'éléments de E .

Dans l'écriture d'un ensemble :

- ⌚ Chaque élément est écrit une seule fois
- ⌚ L'ordre n'a pas d'importance : $\{Pierre; Paul\}$ \equiv $\{Paul; Pierre\}$

Dénombrer un ensemble, c'est calculer son cardinal.

Principe multiplicatif

Exercice type :

- ⌚ Un restaurant propose des menus comportant une entrée, un plat et un dessert. Les clients peuvent choisir parmi 5 entrées, 4 plats et 3 desserts. Combien de menus peut-on composer ?

- ⌚ J'ai 5 pantalons, 6 chemises et 5 vestes. Combien de tenues puis-je composer avec ?

Petit bilan pour dénombrer :

Quand une situation comporte plusieurs choix à effectuer :

- ⌚ On effectue un **produit** quand on doit faire un choix, **puis** un autre...
- ⌚ On effectue une **somme** quand on a à considérer un cas **ou bien** un autre...

Liste d'éléments d'un ensemble

Exemple : Un cadenas est constitué de 4 chiffres compris entre 0 et 9. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

Si E est un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel non nul, une **p-liste** d'éléments de E est une liste **ordonnée** de p éléments de E . (plusieurs éléments peuvent être identiques)

Le nombre de p -listes d'éléments de E est égal à :

Arrangements, permutations

Exemple 1 : Une loterie édite 1000000 billets numérotés de 000000 à 999999. Combien y a-t-il de billets qui portent un numéro composé de 6 chiffres tous différents entre eux ?

Exemple 2 : Dans une course, il y a 8 partants. Combien de podiums existe-t-il ?

Dans le cas où une p -liste d'éléments de E a tous ses termes **distincts deux à deux**, on dit qu'il s'agit d'un **arrangement d'ordre p** des éléments de E .

Remarquons que nécessairement p est inférieur ou égal à n . Le nombre de ces arrangements est noté

Il y a : $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ arrangements d'ordre p .

Dans le cas particulier où $p=n$, un arrangement d'ordre p s'appelle une **permutation**. C'est donc une liste ordonnée où tous les éléments de E figurent une fois et une seule.

Il a $n(n-1)\dots 1$ permutations différentes. On note **$n!$** ce nombre. Il s'appelle **factorielle** de n .

Exercice 1 : Combien peut-on permuter 5 personnes sur un banc de 5 places ? Autour d'une table ?

Exercice 2 : Combien existe-t-il d'anagrammes du mot MAIN ?

Exercice 3 : Combien existe-t-il d'anagrammes du mot POKEMON ? du mot GLACIAL ?

Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal n et p un entier inférieur ou égal à n . On appelle **combinaison d'ordre p** d'éléments de E toute partie de E de cardinal p .

On note C_n^p le nombre de combinaisons d'ordre p .

C'est aussi le nombre de façons d'extraire p boules parmi n boules simultanément, donc en vrac et toutes distinctes.

On a $C_n^p = C_n^{n-p}$

Exemple 1 : Combien existe-t-il de manières de tirer simultanément 5 cartes dans un jeu de 32 cartes ?

Exemple 2 : Une urne contient 18 boules indiscernables. De combien de façons différentes peut-on tirer simultanément 3 boules ?

SYNTHÈSE :

Exercices

1) Un vendeur a convaincu Monsieur Z d'acheter 3 pantalons, 2 vestes, 5 chemises et 6 cravates. Combien de tenues différentes Monsieur Z peut-il former ?

2) Une course de chevaux comporte 17 partants. Combien existe-t-il de tiercés possibles ?

3) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ? du mot PHILOSOPHIE ?

4) Une urne contient 6 boules noires et 4 boules blanches indiscernables au toucher.

On tire simultanément 5 boules.

- ⌚ Combien existe-t-il de tirages différents ?
- ⌚ Combien existe-t-il de tirages contenant 3 boules noires et 2 boules blanches ?
- ⌚ Combien existe-t-il de tirages contenant 4 boules noires et une boule blanche ?

5) On tire 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

- ⌚ Combien existe-t-il de tirages possibles ?
- ⌚ Combien de ces mains contiennent exactement 3 piques ?

6) Un groupe de 12 garçons et de 10 filles décide de monter une pièce de théâtre comportant 4 rôles masculins et 3 rôles féminins.

1. On tire au sort 4 garçons et 3 filles pour constituer la troupe des acteurs.

- ⌚ Combien y a-t-il de troupes possibles ?
- ⌚ Combien y a-t-il de distributions possibles des rôles une fois la troupe choisie ?
- ⌚ Quel est le nombre total de distributions ?

2. Xavier est l'un des garçons et Sandra l'une des filles.

- ⌚ Quel est le nombre de distributions où Xavier joue dans la pièce ?
- ⌚ Quel est le nombre de distributions où Xavier et Sandra jouent ensemble ?