Compléments mathématiques : épisode 1

Calculs avec sommes et produits

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

July 7, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Sommaire

1. Le symbole somme Σ

Certaines sommes sont longues à écrire, comme la somme des entiers consécutifs de 1 à 10.

Nous utilisons alors des points de suspension :

$$S = 1 + 2 + \cdots + 9 + 10$$

1. Le symbole somme Σ

Certaines sommes sont longues à écrire, comme la somme des entiers consécutifs de 1 à 10.

Nous utilisons alors des points de suspension :

$$S = 1 + 2 + \cdots + 9 + 10$$

Ou une abréviation avec le symbole somme Σ :

$$S = \sum_{k=1}^{10} k$$

La variable k est une variable muette : on peut remplacer k par i, j, p, etc.

$$S = \sum_{k=1}^{10} k = \sum_{i=1}^{10} i = \sum_{j=1}^{10} j = \sum_{p=1}^{10} p \dots$$

Les bornes sont des entiers.

Exemple 1

écrivons avec le symbole Σ la somme

$$S = 2 + 4 + 6 + \cdots + 100$$

En remarquant que nous sommons des nombres pairs i.e de la forme $2k$, où k entier, nous obtenons :

$$S = \sum_{k=1}^{50} 2k$$

En Python :

S = sum([2*k for k in range(1,**51**)])

ou S = sum([k for k in range(2,**102**,2)])

L'itérateur **range** en Python permet de générer des progressions arithmétiques. Attention à la syntaxe où la borne finale n'est pas incluse !

Exercice 1

En utilisant les fonctions sum et range, calculer :

1. $S_1 = 3 + 5 + \cdots + 99$ Rép : 2499
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{10} (2k)^2$ Rép : 1540
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=10}^{30} \frac{1}{k}$ à 10^{-3} près. Rép : 1,166

Propriété 1

Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, \lambda$ des réels.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k.$ En particulier : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda = n\lambda.$
3. Soient $m \leq p < n$. Alors :
$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k$$

1. Le symbole somme Σ

Sommes usuelles

Les résultats qui suivent sont à connaître par cœur ! Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
3. $$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
4. Si $q \neq 1$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

1. Le symbole somme Σ

Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

(u_n) désigne une suite de nombres réels ou complexes.

1. Une suite (u_n) est dite **arithmétique** (resp. **géométrique**) s'il existe un réel (ou complexe) r (resp. q) tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + r$. (resp. $u_{n+1} = qu_n$) ; r (resp. q) s'appelle alors la **raison** de la suite (u_n).
2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r (resp. une suite géométrique de raison $q \neq 0$). Pour tous entiers naturels m et n : $u_n = u_m + (n-m)r$ (resp. $u_n = u_m q^{n-m}$).
3. Soit $m \leq n$: Le nombre de **termes consécutifs** entre u_m et u_n inclus est $n - m + 1$.

Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

(u_n) désigne une suite de nombres réels ou complexes.

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. La somme de termes consécutifs de (u_n) est égale à :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. La somme de termes consécutifs de (u_n) est égale à :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple 2

Expliciter en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-3)^k$
2. $T_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}$
3. $U_n = \sum_{k=1}^{n} (3n^2 - 4n + 1)$

Exemple 2 : solution

1. On reconnait la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison $q=-3$. D'où
$$S_n = \frac{1-(-3)^{n+1}}{4}$$
2. On reconnait la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $1/2$ et de raison $q=1/2$. D'où
$$T_n = \frac{1}{2} \times \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$
3. $$U_n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + n = \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n.$$
D'où $U_n = n\left(\frac{(n+1)(2n+1-4)}{2} + 1\right) = \frac{n(2n+1)(n-1)}{2}$.

Propriété 2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels.

1. Changement de numérotation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}$
2. Changement d'indice : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{j=i}^{i+n} a_j$, où $i \in \mathbb{N}$ et où on a posé $j = k - i$.

Exemple 3

Nous rappelons que pour tous entiers naturels $p \leq n$: $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Formule du binôme de Newton : $\displaystyle(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

1. Calculer $\displaystyle S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\displaystyle S_2 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$
2. Calculer $\displaystyle S_3 = \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k}$ et $\displaystyle S_4 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$
3. Calculer $\displaystyle S_5 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$

Exemple 3 : solution

Commençons par remarquer que pour tout réel x et tout entier naturel n :

$(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. Nous poserons $S(x) = (1+x)^n$.

1. $S_1 = (1+1)^n = 2^n$. De même, $S_2 = (1+2)^n = 3^n$.
2. S est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme, et pour tout réel x : $S'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$.

   Nous avons donc : $S'(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$.

   Et $S''(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$.

Exemple 3 : solution

Ainsi, $S_3 = S''(1) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1) \times 2^{n-2}$.

Comme $k(k-1) = k^2 - k$, nous en déduisons que $S_4 = S_3 - S'(1)$, soit : $S_4 = n \times 2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1) \times 2^{n-2}$.

3 Il va falloir ruser un peu avec les coefficients binomiaux. Remarquons que pour $k \leq n$: $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$.

D'où $S_5 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}$.

Posons $k' = k+1$.

$$S_5 = \frac{1}{n+1}\sum_{k'=1}^{n+1}\binom{n+1}{k'} = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k'=0}^{n+1}\binom{n+1}{k'} - 1\right) = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Exercice 2

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) \quad : \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx) = 0$$

Vous pourrez utiliser le fait que $\cos(kx) = \Re(e^{ikx})$.

Exercice 2 : solution

$(E) \iff \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Re(e^{ikx}) = 0 \iff \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}\right) = 0.$

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^{ix})^k = (1 + e^{ix})^n.$

$1 + e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2e^{ix/2}\cos(x/2)$ (angle moitié).

D'où $(1 + e^{ix})^n = 2^n e^{inx/2} \cos^n(x/2)$. Mais alors : $(E) \iff$ $2^n \cos(nx/2)\cos^n(x/2) = 0 \iff \cos(nx/2) = 0$ ou $\cos(x/2) = 0$. Bref : $(E) \iff \dfrac{nx}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\dfrac{x}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \iff x \equiv \dfrac{\pi}{n}[2\pi]$ ou $x \equiv \pi[2\pi]$.

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{n} + 2k\pi\} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \{\pi + 2k\pi\}$$

Sommes télescopiques

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1}$$

Deux illustrations

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$

   En effet, il suffit de remarquer que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \ldots$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)}.$ En effet :

   $$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1/2}{2k-1} - \frac{1/2}{2k+1} = \frac{1/2}{2(k-1)+1} - \frac{1/2}{2k+1}$$

2. Sommes doubles

Il est très fréquent, par exemple en statistiques, que nous soyons amenés à travailler avec deux indices. Nous serons donc amenés à calculer des sommes de la forme $S = \sum_{i,j \in D} a_{i,j}$ où D est une partie finie de $\mathbb{N}^2$.

Nous verrons que dans certains cas, il est simple de se représenter ce domaine D, et partant, d'effectuer certains calculs.

Nous verrons également qu'il est possible d'exprimer D de deux façons différentes, ce qui peut s'avérer très pratique pour le calcul de S.

Exemple fondamental 4 : $D = [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$

Autrement dit, D est le *rectangle discret* :
$D = \{(i;j) \in \mathbb{N}^2 ; 1 \leq i \leq n ; 1 \leq j \leq m\}$.

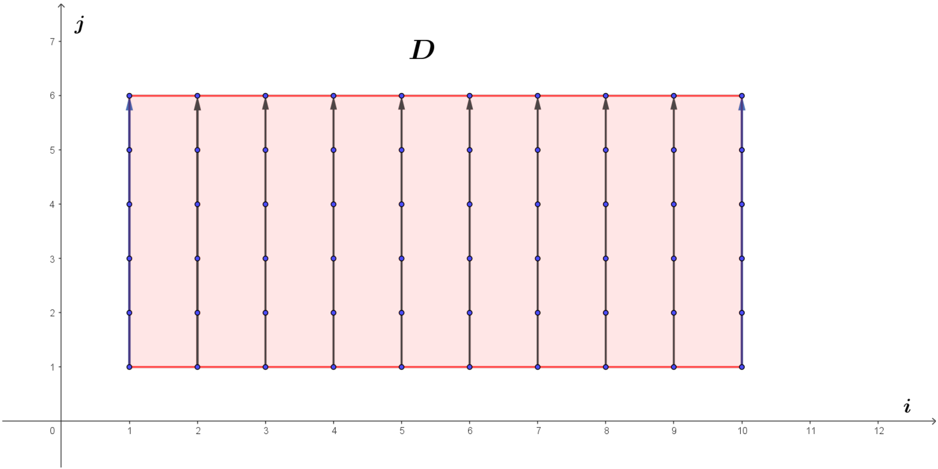
Soient $a_{i,j}$ des réels où $(i,j) \in D$. On pose $S = \sum_{(i,j) \in D} a_{i,j}$.

1. $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}$ (sommation par tranches)
2. $S = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ (sommation par piles)

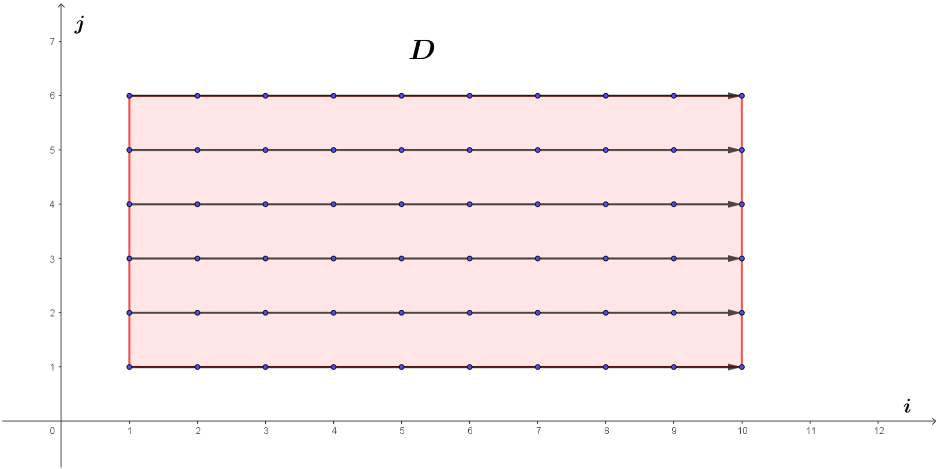
Bref :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Sommation par tranches : pour i (en abscisse) variant de 1 à n, j (en ordonnées) varie de 1 à m.



Sommation par piles : pour j (en ordonnée) variant de 1 à m, i (en abscisse) varie de 1 à n.



La même technique s'applique pour des domaines D plus complexes :

Considérons par exemple $D = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 ; 1 \leq i \leq j \leq n\}$ et $S = \sum_{(i,j) \in D} a_{i,j}$.

1. En sommant par tranches : $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{i,j}$
2. En sommant par piles : $S = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$

Le lecteur (la lectrice) est invité(e) à faire un dessin de D.

Et bien sûr, Python est très efficace pour de tels calculs à l'aide des listes définies par compréhension.

2. Sommes doubles

Propriété 3 : dissociation

Soient m, n des entiers naturels non nuls, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

$$\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right).$$

Exemple 5

Calculer $S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} ij$.

D'après la propriété 3 de dissociation :

$$S = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} j \right) = \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{m(m+1)}{2} = \frac{nm(n+1)(m+1)}{4}$$

Exemple 6

Calculer l'expression littérale de $S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$ puis en déduire S_{10}.

Retrouver ce résultat à l'aide de Python.

Exemple 6 : solution

Il n'est pas question ici d'appliquer la dissociation au vu de D : $D = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 ; 1 \leq i \leq j \leq n\}$! Nous allons donc parcourir D par tranches ou par piles.

Par piles : $S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} ij = \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} j . \frac{j(j+1)}{2}$.

D'où $S_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^3 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

$$S_n = \frac{n(n+1)}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2n+1}{3} \right) = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{24}$$

Soit en factorisant le trinôme : $S_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$

Exemple 6 : solution

Nous en déduisons que $S_{10} = 1705$.

Avec Python :

1. Par tranches : `sum([i*j for i in range(1,11) for j in range(i,11)])`
2. Par piles : `sum([i*j for j in range(1,11) for i in range(1,j+1)])`

Dans un cas comme dans l'autre, nous obtenons bien une somme de 1705.

3. Le symbole Produit $\prod$

Vous avez déjà rencontré le symbole produit $\prod$ lors de la définition de la factorielle d'un entier naturel n non nul :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$$

que l'on peut écrire :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

Bien entendu, la variable k est une variable muette : nous pouvons la remplacer par n'importe quel autre nom de variable : i, j, etc.

Plus généralement, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels, on notera leur produit :

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

Propriété 1

Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \lambda$ des réels, p un entier naturel.

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k b_k = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$ si tous les b_k sont non nuls. En particulier, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k^p = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p$.
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$. En particulier, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \lambda = \lambda^n$.
3. Soient $m \leq p < n$. Alors :
$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m}^{p} a_k \times \prod_{k=p+1}^{n} a_k$$

Exemple 7

Expliciter en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes :

1. $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(3k)$
2. $Q_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k}$

Exemple 7 : solution

1. D'après Prop 1) 2) : $P_n = 3^n \prod_{k=1}^{n} k = 3^n n!$
2. D'après Prop 1) 1) : $Q_n = \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)}{\prod_{k=1}^{n} k}$. Or $\prod_{k=1}^{n} k = n!$ et

   $\prod_{k=1}^{n}(2k+1) = 3 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}$.

   De plus, $2 \times 4 \times \cdots \times (2n) = 2^n n!$.

   D'où finalement $Q_n = \frac{(2n+1)!}{2^n n!^2}$.

Propriété 2

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n$ des réels.

1. Changement de numérotation : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{k=0}^{n} a_{n-k}$
2. Changement d'indice : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} a_k = \prod_{j=i}^{i+n} a_j$, où $i \in \mathbb{N}$ et où on a posé $j = k - i$.

Exemple 8

Calculer $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (e^{k+3})^3$

Exemple 8 : solution

D'après Prop 1) 1) : $P_n = \left(\prod_{k=1}^{n} e^{k+3}\right)^3 = \left(e^3 \prod_{k=1}^{n} e^k\right)^3$

D'où $P_n = e^9 \left(e^{\sum_{k=1}^{n} k}\right)^3 = e^9 \left(e^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^3 = e^9.e^{\frac{3n(n+1)}{2}}$

Nous aurions aussi pu faire le changement de variables $k' = k+3$.

3. Le symbole Produit $\prod$

Tout comme pour les sommes, nous disposons de la notion de "produit double", qui se traite de la même manière aux adaptations près.

Nous ne donnerons donc pas de propriétés supplémentaires et laissons le lecteur s'adapter. Ce n'est pas de la mauvaise volonté de notre part, mais au contraire un exercice très formateur !

Exercice 3

Simplifier les produits suivants en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles :

1. $P_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \sqrt{k(k+1)}$
2. $P_2 = \displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} i^j$
3. $P_3 = \displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij$

Exercice 3 : solution

1. $P_1 = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} k(k+1)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n}(k+1)} = \sqrt{n!(n+1)!}$

2. $P_2 = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{j} = \prod_{j=1}^{n} n!^{j} = n!^{\sum_{j=1}^{n} j} = n!^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3. $P_3 = \prod_{i=1}^{n} i \prod_{j=1}^{n} j = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{2} = n!^{2}$

4. Exercices à chercher

Simplifier le plus possible les expressions suivantes :

1. $S_1 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} j$
2. $S_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j - i)$
3. $S_3 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \max\{i, j\}$
4. $S_4 = \prod_{k=1}^{n} (4k^2 - 1)$
5. $S_5 = \prod_{1 \leq i,j \leq n} x^{i+j}$
6. $S_6 = \prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$