# Polynômes de degré 2 : une introduction

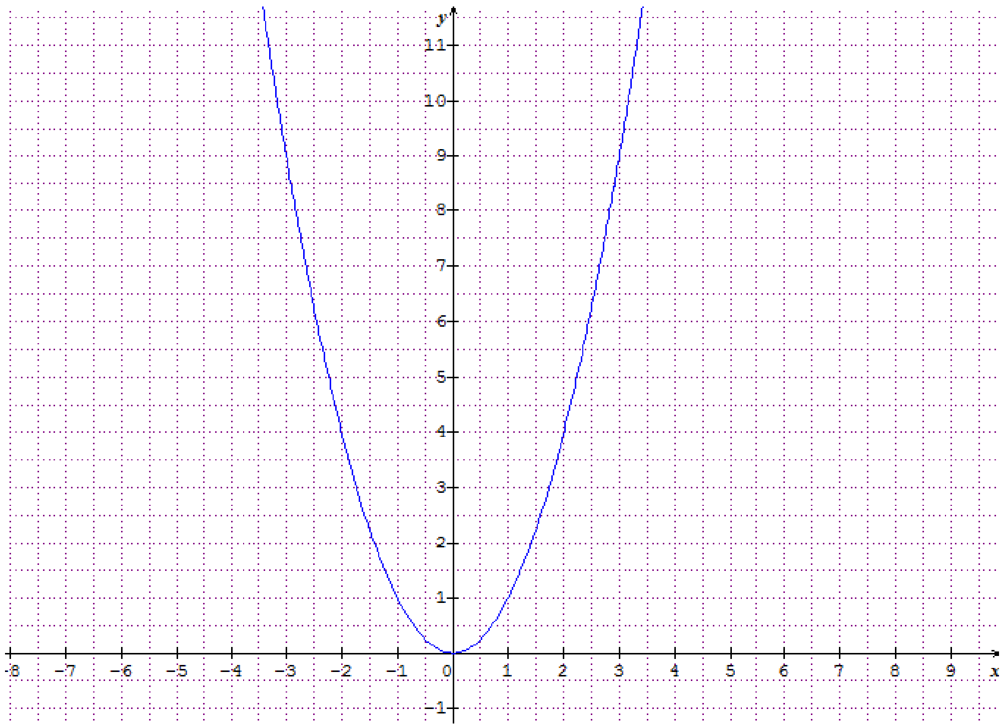
**Rappels sur la fonction carrée :** Nous présentons ici les principaux résultats vus en classe de seconde.

**Définition** : On appelle **fonction carrée** la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

On note $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ s'appelle une **parabole**.

**Propriétés** :

1. $f(0) = 0$ donc $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine.
2. Pour tout réel $x$ : $f(-x) = f(x)$, autrement dit, $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
3. $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
4. $f$ a pour minimum global 0 en $x = 0$.




**Théorème** : Soit $k$ un nombre réel.

1. Si $k < 0$, l'équation $x^2 = k$ n'a aucune solution.
2. Si $k = 0$, l'équation $x^2 = k$ a une unique solution : $x = 0$.
3. Si $k > 0$, l'équation $x^2 = k$ a deux solutions distinctes : $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$.

Démonstration :

**Exercice** : Résoudre par le calcul les équations suivantes :

1. $x^2 = 5$

2. $x^2 = -3$

3. $(3x-1)^2 = 16$

4. $25x^2 = 4$

5. $3x^2 = 2$

**Théorème** : Soit $k$ un nombre réel strictement positif.

1. $x^2 \leq k$ si et seulement si $-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$
2. $x^2 \geq k$ si et seulement si $x \leq -\sqrt{k}$ ou $x \geq \sqrt{k}$

Démonstration :

**Exercice** : résoudre l'inéquation $(4x+5)^2 \leq 36$ et l'inéquation $(3x-7)^2 \geq 2$.

**Trinôme et forme canonique :** de l'utilité des bien connaître ses identités remarquables !

**Définition** : On appelle **fonction polynôme de second degré ou trinôme** toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a$ est un réel non nul et $b$ et $c$ des réels.

On note $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto ax^2 + bx + c \end{cases}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ s'appelle aussi **parabole**.

**Exercice** : Déterminez parmi les expressions qui suivent celles qui sont des trinômes i.e celles qui peuvent s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ et précisez le cas échéant les réels $a$, $b$ et $c$.

1. $f(x) = (2x-5)(7x+3)$
2. $f(x) = -(2x^2 - 5x + 9) + (2x+7)(x-1)$
3. $f(x) = x^2 + 4x + 4$
4. $f(x) = 3x^2 - (\sqrt{x})^2$
5. $f(x) = 5x^2 + 2\sqrt{x}$

Solution :

**Exercice** : L'intérêt d'une forme factorisée tient au résultat suivant : **un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul**. En utilisant ce fait, quitte à se ramener à une équation produit, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations :

1. $(2x-5)(7x+3)=0$
2. $x^2-4x+4=0$
3. $25x^2=10x-1$
4. $x^2+2\sqrt{3}x=-3$
5. $(4x+5)^2=(-x+2)^2$

Solution :

Mais il est rare, comme dans l'exercice précédent, de tomber directement ou presque sur une identité remarquable qui nous conduit à une équation produit. Il va falloir s'y ramener. Plutôt qu'un long discours, regardez les deux exemples qui suivent :

**Exemple 1** : Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+6x+8=0$.

L'expression $x^2+6x+8$ ressemble à s'y méprendre à une identité remarquable ...Sauf qu'il faudrait remplacer 8 par 9 à la fin.
En effet : $x^2+6x+9=x^2+2\times 3x+3^2=(x+3)^2$. Faisons alors apparaitre ce 9 puisqu'il nous arrange (on remplace 8 par $9-1$) :

$$x^2+6x+8=(x^2+6x+9)-1=(x+3)^2-1=(x+3)^2-1^2=(x+3-1)(x+3+1)=(x+2)(x+4)$$

Ainsi l'équation $x^2+6x+8=0$ se réécrit sous la forme sympathique d'une équation produit $(x+2)(x+4)=0$ qu'il est aisé de résoudre : $\boxed{\mathscr{S}=\{-2;-4\}}$.

**Exemple 2** : Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2+4x+8=0$.

On reconnaît dans les deux premiers termes du membre de gauche le début d'une identité remarquable :
$\underline{x^2+4x}+8=\underline{x^2+2\times 2x}+8=\underline{(x+2)^2-4}+8=(x+2)^2+4$
ou dit autrement :
$x^2+4x+8=(x^2+4x+4)+4=(x+2)^2+4$.

Or pour tout réel $x$ : $(x+2)^2\geq 0$ et $4>0$, donc pour tout réel $x$ : $x^2+4x+8>0$.
On en déduit que l'équation $x^2+4x+8=0$ n'a pas de solution : $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.

**Exercice** : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $x^2-10x+16=0$
2. $x^2+3x+1=0$ *(indice : tout nombre est le double de sa moitié)*
3. $x^2+3x+4=0$

Solution :

Nous avons fait un grand pas dans la résolution des équations du second degré ! La seule chose qui nous reste à régler, c'est le cas où le coefficient (non nul) $a$ de $ax^2+bx+c$ est différent de 1. Encore une fois un exemple va nous permettre de comprendre le cas général qui vous apparaitra alors d'autant plus naturel ...et surtout très aisé d'utilisation !

**Exemple** : Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ :\ 2x^2+4x-3=0$.

Cette équation est de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=2$, $b=4$ et $c=-3$.
$2x^2+4x-3=2\left(x^2+2x-\dfrac{3}{2}\right)=2\left((x+1)^2-1-\dfrac{3}{2}\right)=2\left((x+1)^2-\dfrac{5}{2}\right)$.

1. On a donc $2x^2+4x-3=2(x+1)^2-5$. On dit que $2(x+1)^2-5$ est la **forme canonique** de $2x^2+4x-3$. Nous verrons son utilité pour décrire précisément les variations de la courbe représentative de $f$ de notre trinôme.
2. La forme factorisée totale de $f(x)=2x^2+4x-3$ s'écrit :

$$f(x)=2\left((x+1)^2-\frac{5}{2}\right)=2\left((x+1)^2-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2\right)$$

soit :

$$f(x)=2\left(x+1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x+1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\quad(\blacksquare)$$

On en déduit immédiatement les solutions de (E) :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-1-\sqrt{\frac{5}{2}};-1+\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}}$$

On peut même faire mieux : déterminer le signe de $f(x)=2x^2+4x-3$ en fonction des valeurs prises par $x$ à l'aide de la forme factorisée ($\blacksquare$).
Notons $x_1<x_2$ les solutions de (E). Ainsi $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.
Dressez le *tableau de signes* de $f$ :

**Théorème et définition** : Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ peut s'écrire sous la forme $\boxed{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$, où $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, avec $\Delta = b^2 - 4ac$.
On la nomme **forme canonique**.

Démonstration :

Remarque fondamentale : On a donc $\boxed{f(x) = a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right)}$.

**Théorème et définition** : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ un trinôme.
On appelle **discriminant** le nombre réel noté $\Delta$ et défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle et $f(x)$ ne se factorise pas.
2. Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $f(x)$ se factorise sous la forme $f(x) = a(x-x_0)^2$.
3. Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus, $f(x)$ se factorise sous la forme $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

Démonstration :

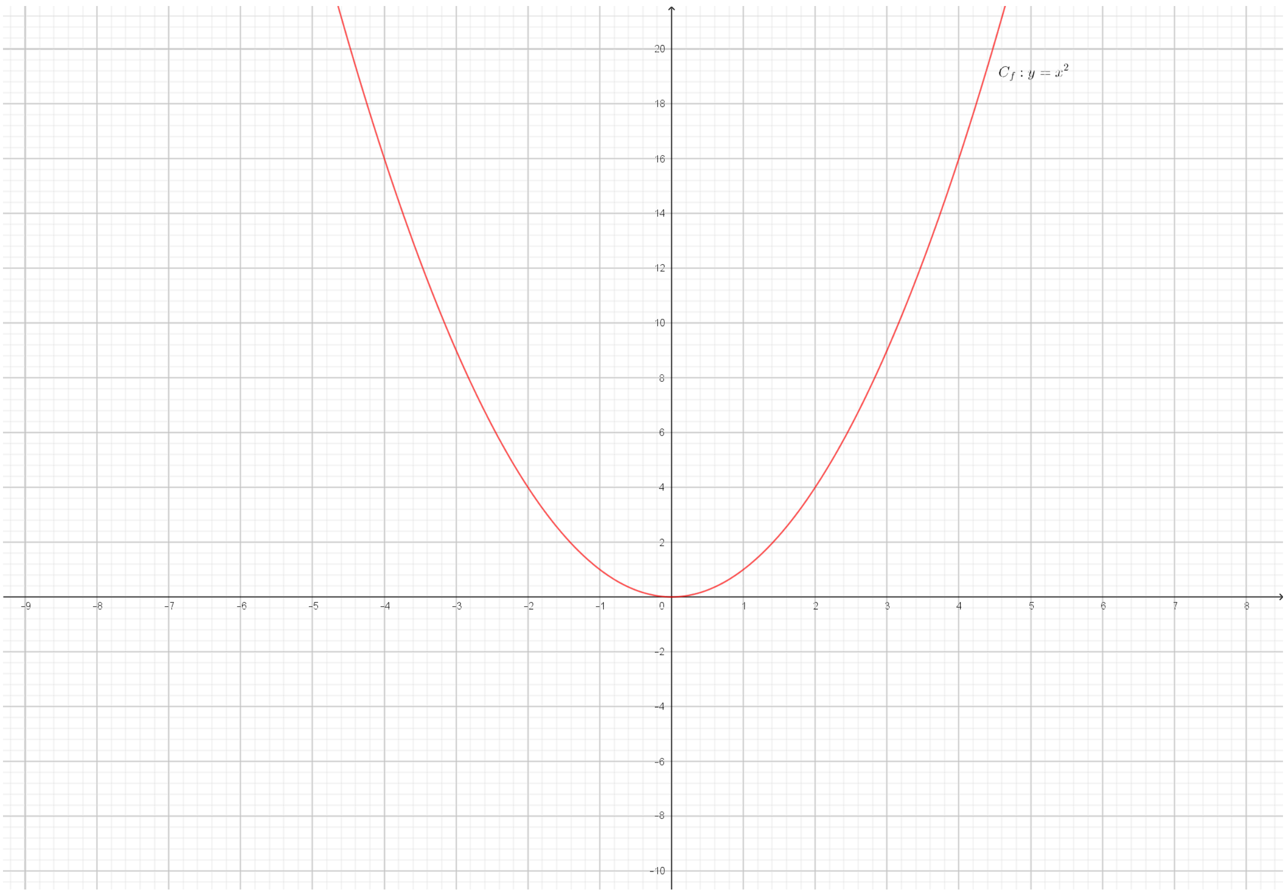
**Premières applications :**

1. Une voiture a parcouru une distance de 600 km. Si sa vitesse avait été supérieure de 16 km/h, le trajet aurait duré une heure et quart de moins. Calculez sa vitesse en km/h.
2. Une pelouse a la forme d'un rectangle dont la longueur est le double de la largeur. Une allée de 3 m de large entoure cette pelouse. Calculez les dimensions (largeur et longueur) de la pelouse, sachant que l'aire totale, pelouse et allée, est de 360m².
3. Inscrire un rectangle de 28 cm de périmètre dans un cercle de 5 cm de rayon.
4. Un objet a augmenté de 4% entre 2020 et 2021, puis de 12% entre 2021 et 2022. Calculez son augmentation moyenne entre 2020 et 2022.

**De la fonction carrée à la fonction trinôme :** **Retour sur l'aspect graphique**.

**Exercice** : En utilisant la courbe représentative $f$ de la fonction carrée, dessinez sur le graphique qui suit les courbes représentatives des fonctions $f_1$ à $f_7$ définies par :

1. $f_1(x) = x^2 + 3$ (*remarque* : $f_1(x) = f(x) + 3$).
2. $f_2(x) = x^2 - 4$
3. $f_3(x) = (x+2)^2$ (*remarque* : $f_3(x) = f(x+2)$).
4. $f_4(x) = (x-3)^2$
5. $f_5(x) = (x-4)^2 + 2$ (*remarque* : $f_5(x) = f(x-4) + 2$).
6. $f_6(x) = 0{,}5x^2$ (*remarque* : $f_6(x) = \dfrac{1}{2} f(x)$).
7. $f_7(x) = -x^2$




**Exercice** : Quel effet ont les transformations suivantes en partant de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction $f$ ? On notera abusivement $f(x)$ pour $f$.

1. a) $f(x) + k$ ; b) $f(x) - k$, où $k$ est un réel strictement positif ?
2. a) $f(x+k)$ ; b) $f(x-k)$ , où $k$ est un réel strictement positif ?
3. $kf(x)$ où : a) $0 < k < 1$ ; b) $k > 1$
4. a) $-f(x)$ ; b) $kf(x)$ où $k < 0$

**Synthèse :** **Variations et signe d'un trinôme**.