Exercices du diaporama 1

Les exercices 1 à 4 sont faciles : assurez-vous de les comprendre parfaitement.
Les exercices 5 à 8 sont de niveau standard, celui à acquérir pour la terminale.
Enfin les exercices 9 et 10 font appel à un peu plus d'imagination et/ou de technique et constituent une ouverture vers les sections suivantes que nous verrons en cours.

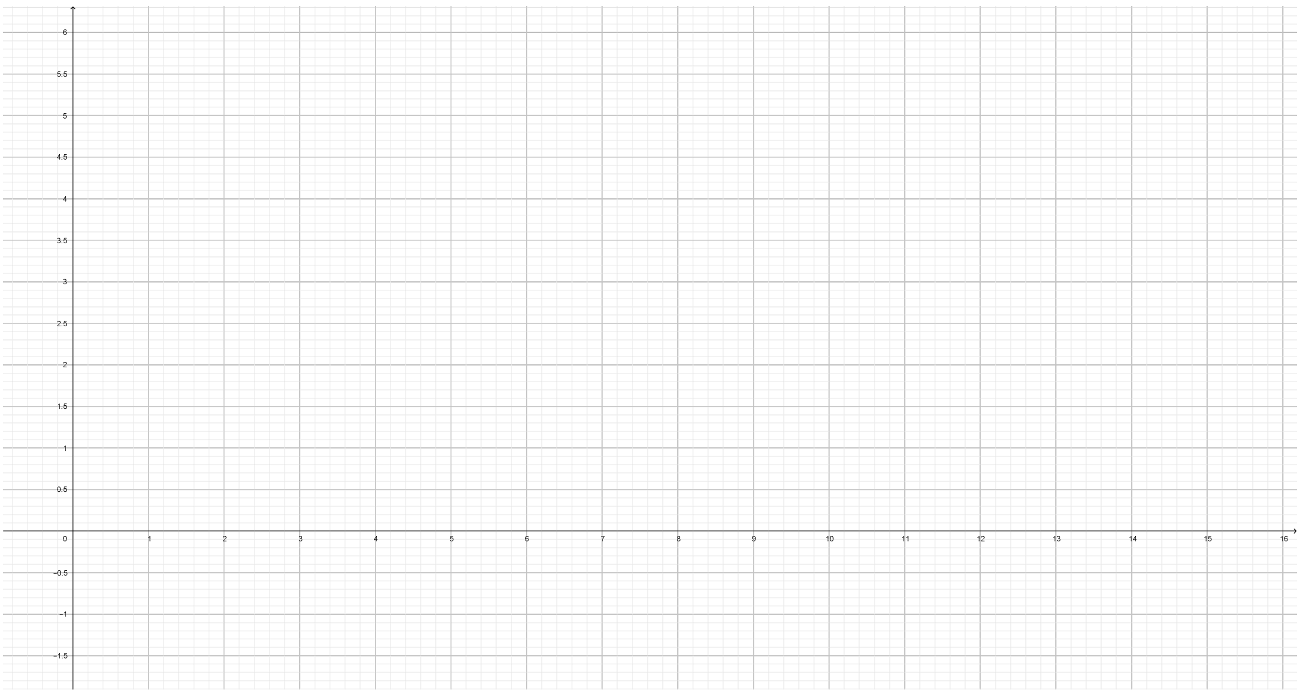
Exercice 1 : Déterminez parmi les suites (u_n) définies ci-dessous celles qui sont définies de manière explicite ou par récurrence et *précisez la valeur exacte de leurs 4 premiers termes*.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{4}n^2 + n - 1$
2. $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 3u_n$
3. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{1+n}$
5. $u_4 = 20$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2u_n$

Exercice 2 : Déterminez parmi les suites (u_n) définies ci-dessous celles qui sont *mal définies* et justifiez pourquoi.

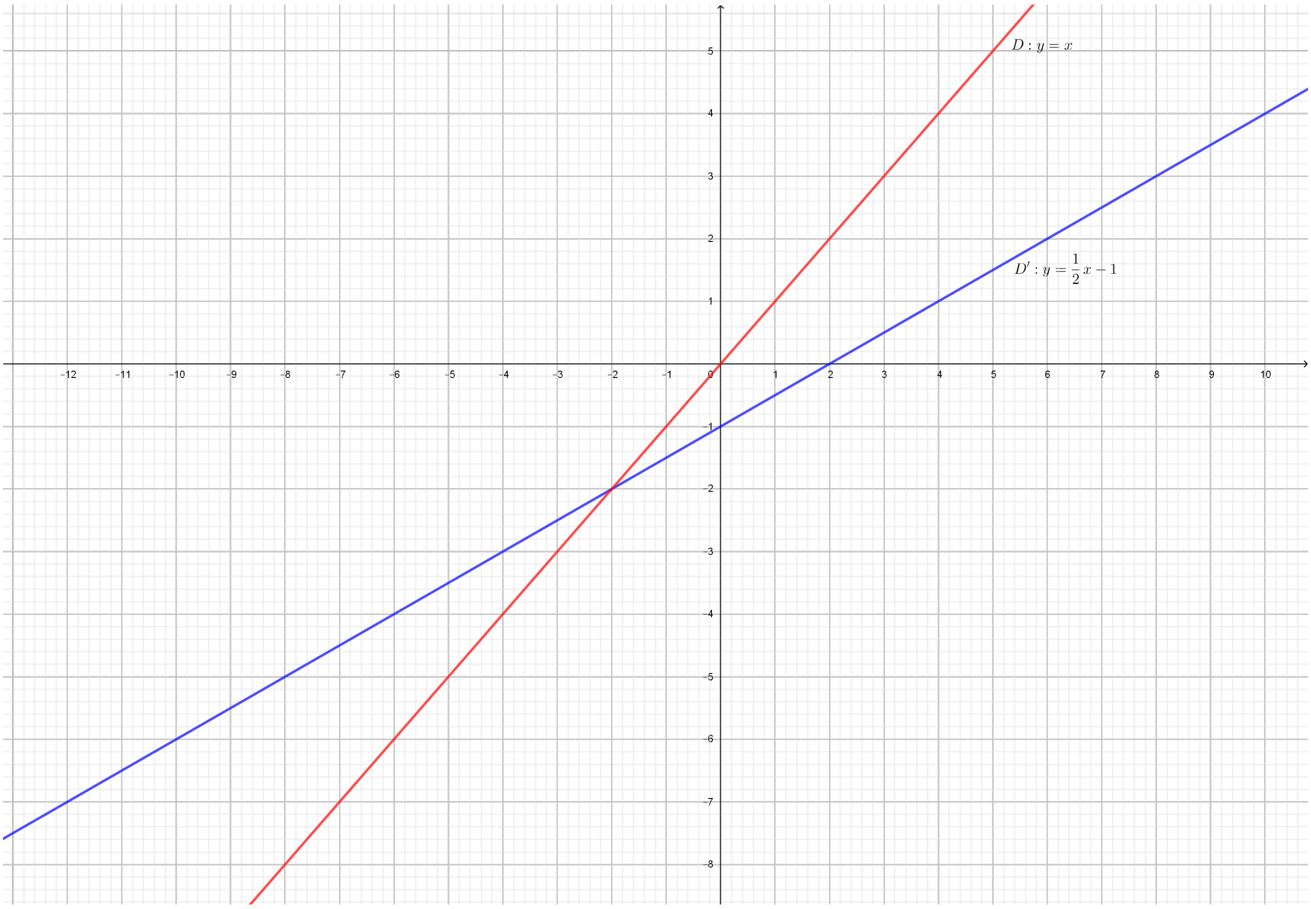
1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n - \sqrt{n}$
2. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 5u_n$
3. $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - 10$
4. $u_0 = 0{,}25$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 + \sqrt{0{,}5 - u_n}$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{100 - n^2}$

Exercice 3 : Dessinez dans le repère ci-dessous les 15 premiers points $M_n(n;u_n)$ où la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{1}{2}n - 1$.



Exercice 4 : Dessinez sur l'axe des abscisses les termes u_0 à u_4 de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1. Dans le cas où $u_0 = -8$
2. Dans le cas où $u_0 = 10$



On dit qu'une suite (u_n) est croissante (resp. décroissante) si pour tout entier naturel n : $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$). Faites une conjecture sur la monotonie de (u_n) en fonction de la valeur de u_0.

Exercice 5 : Jusqu'ici, nous avons travaillé avec les suites définies par récurrence où la fonction f était croissante. Qu'en est-il si elle est décroissante ? Traitons un premier exemple.

1. Dessinez sur l'axe des abscisses les termes u_0 à u_5 de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 8$.
   (a) Dans le cas où $u_0 = 0$
   (b) Dans le cas où $u_0 = 10$
2. Faites une conjecture sur la monotonie de (u_n) en fonction de la valeur de u_0.
3. Faites une conjecture sur la monotonie des termes d'indice pair de la suite (u_n) ainsi que sur celle des termes d'indice impair selon la valeur de u_0.
4. Comment pourrait-on noter la suite des termes d'indice pair (resp. d'indice impair) de la suite (u_n) en fonction de n ?

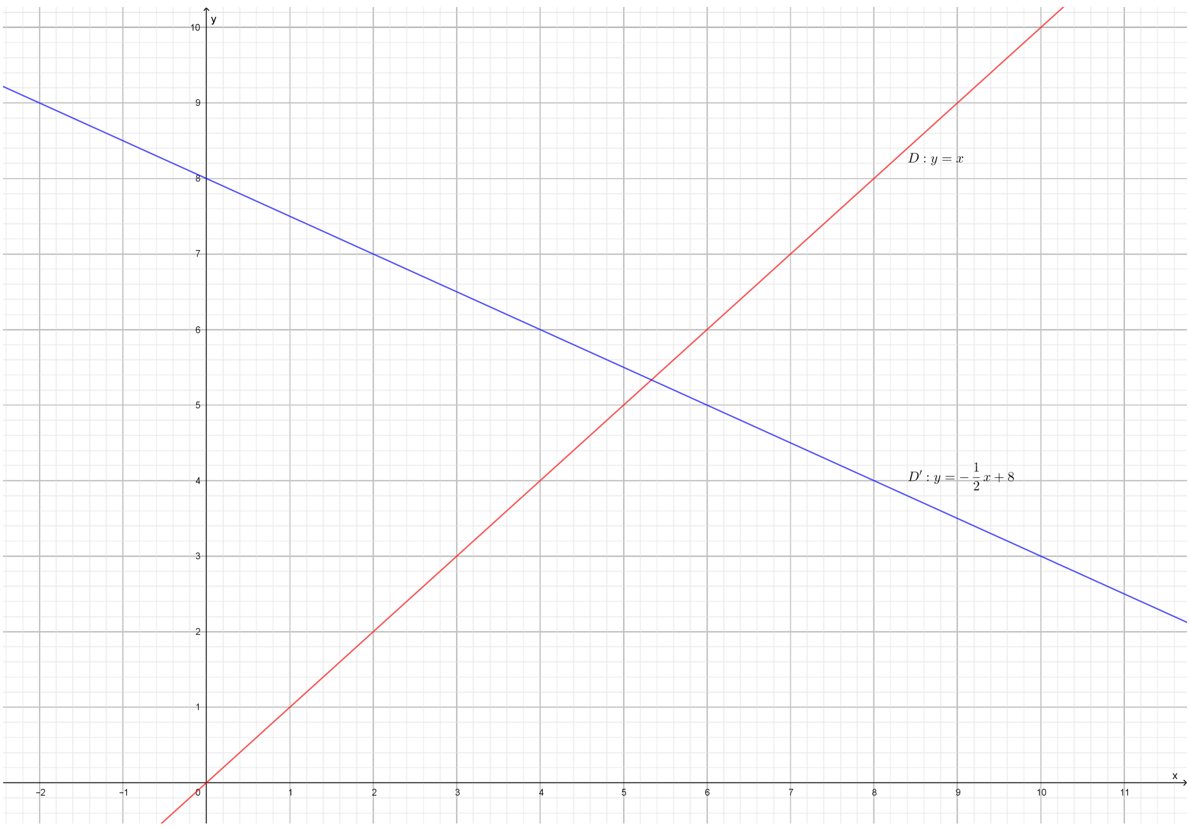


FIGURE 1 – Cas où $u_0 = 0$

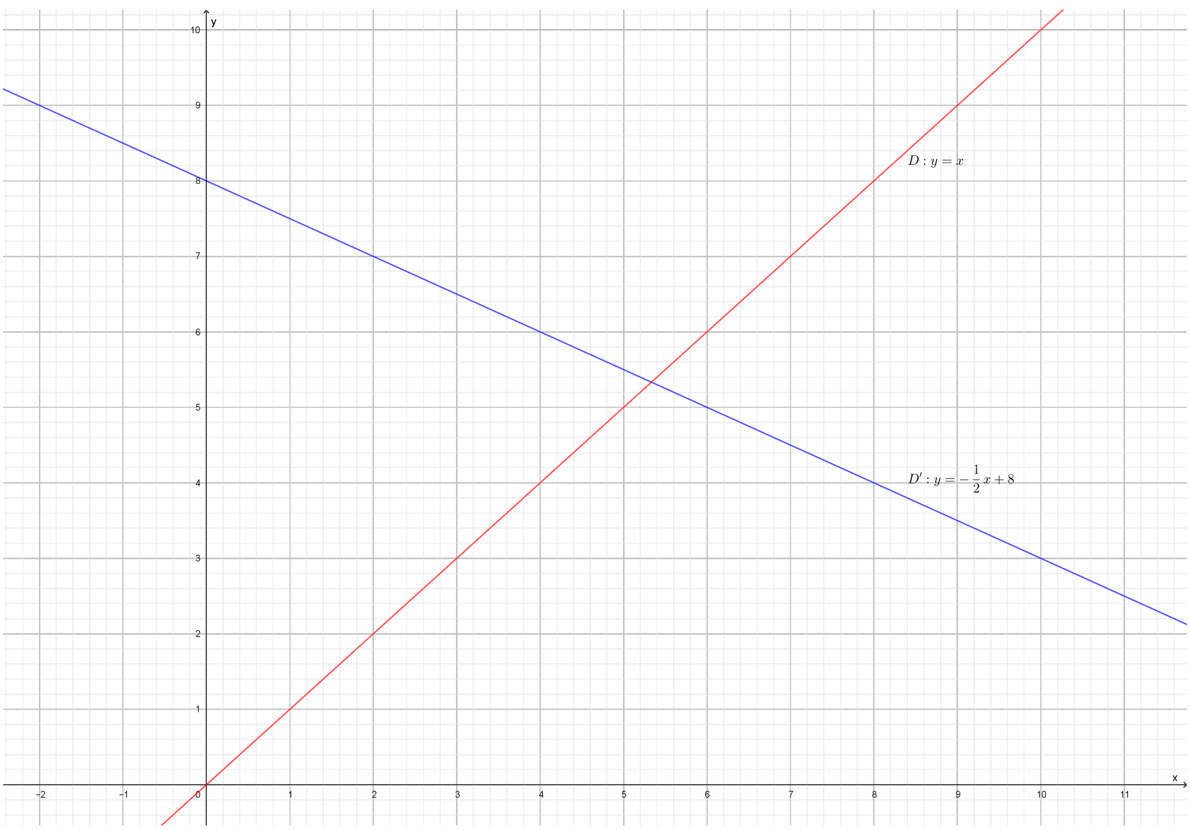
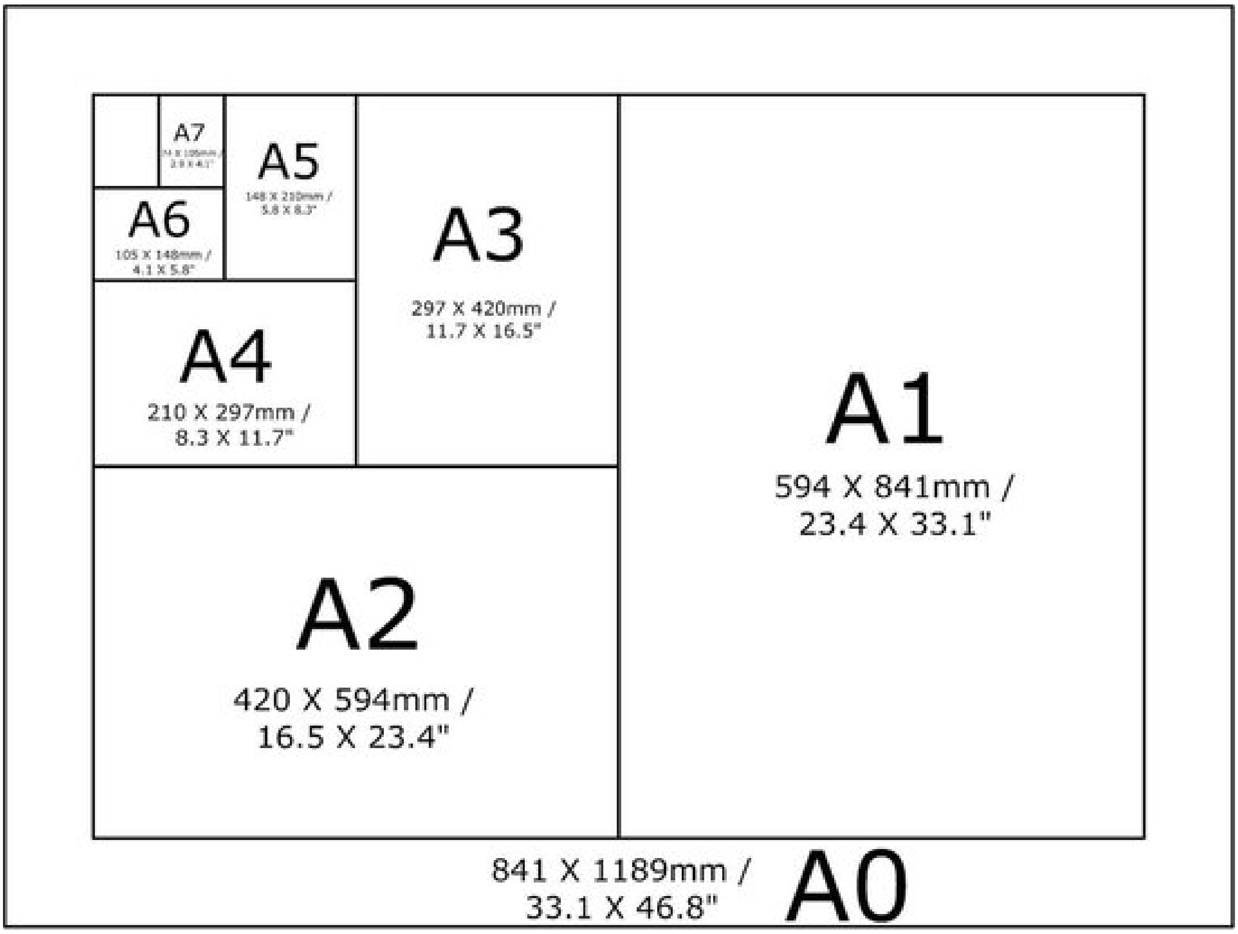


FIGURE 2 – Cas où $u_0 = 10$

Exercice 6 : Le prix d'un objet de valeur initiale $u_0 = 15000$ € diminue chaque année de 10%. On note u_n la valeur de l'objet au bout de n années.

1. Calculez u_1, u_2, u_3 et u_4. On arrondira si nécessaire à 0,01 près.
2. Proposez une relation de récurrence donnant u_{n+1} en fonction de u_n.
3. En utilisant la définition donnée à l'exercice 4, prouvez que la suite (u_n) est (strictement) décroissante.
4. Écrire un script en Python affichant l'entier N pour lequel la valeur de l'objet tombe pour la première fois sous la barre des 2000 €.

Exercice 7 : Que vous suggère la figure suivante concernant l'aire des pages aux formats annoncés ? Si l'on pouvait continuer indéfiniment, proposez une définition explicite de l'aire d'une feuille de format A_n pour tout entier naturel n. Attention aux arrondis ! (renseignez-vous sur la définition de partie entière d'un réel sur wikipedia).



Exercice 8 : Suite de Syracuse.
On définit la suite de Collatz (dite aussi de Syracuse) de la manière suivante : on se donne un entier $u_0 > 0$, appelée **"la graine"**. Pour tout entier naturel n, on définit la suite (u_n) de la manière suivante :

— si u_n est pair, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$,

— sinon $u_{n+1} = 3u_n + 1$.

1. Calculez les termes u_1 à u_{11} dans les cas où : $u_0 = 3$, $u_0 = 5$ et $u_0 = 6$. Que remarquez-vous ?

2. Écrire un programme en Python qui prend comme variables d'entrée n et u_0 et qui affiche tous les termes de u_0 à u_n inclus.
3. Écrire un programme en Python qui prend comme entrée le terme initial u_0 (un entier supérieur ou égal à 2) et affiche l'indice du terme où 1 apparaît pour la première fois (durée du vol), puis la plus grande valeur atteinte (l'altitude maximum) au cours du vol.

Exercice 9 : Pas de calculs cette fois-ci : préparez deux exposés (2 à 3 pages) sur le thème de "la spirale de Pythagore" et, plus ardu, sur celui de la spirale de Fibonacci.

Exercice 10 : *Préliminaire* : On se donne un triangle équilatéral ABC dont la longueur de chaque côté est un réel strictement positif ℓ. Calculez son périmètre $\mathscr{P}$ puis la longueur commune h de ses hauteurs et en déduire son aire $\mathscr{A}$ en fonction de ℓ.

1. Étape 0 : Dessinez à la règle et au compas au crayon (de préférence H), sur une feuille format A3 ("au centre") un triangle équilatéral ABC de côté 18 cm. Nous l'appellerons figure 0. Vous n'appuierez pas vos traits. On pose $\ell_0 = 18$.
   Précisez son nombre de côtés c_0 et exprimez son périmètre $\mathscr{P}_0$ et son aire $\mathscr{A}_0$ en fonction de c_0 et de ℓ_0 i.e une expression de ces deux dernières quantités où c_0 et ℓ_0 apparaissent.
2. Étape 1 : On divise chaque segment de la figure précédente en 3 segments de longueur égale notée ℓ_1. On construit extérieurement un triangle équilatéral à partir du segment central puis on efface ce segment central.
   Faites la figure 1 à partir de la figure 0 et exprimez son nombre de côtés c_1 en fonction de c_0, la longueur d'un de ses côtés ℓ_1 en fonction de ℓ_0, son périmètre $\mathscr{P}_1$ en fonction de c_1 et ℓ_1, puis son aire $\mathscr{A}_1$ en fonction de $\mathscr{A}_0$, c_0 et ℓ_0.
3. On répète le même procédé pour passer de la figure 1 à la figure 2.
   Faites la figure 2 à partir de la figure 1 et exprimez son nombre de côtés c_2 en fonction de c_1, la longueur d'un de ses côtés ℓ_2 en fonction de ℓ_1, son périmètre $\mathscr{P}_2$ en fonction de c_2 et ℓ_2, puis son aire $\mathscr{A}_2$ en fonction de $\mathscr{A}_1$, c_1 et ℓ_1.
4. Proposez des expressions explicites de c_n et de ℓ_n en fonction de n.
5. Proposez une expression explicite de $\mathscr{P}_n$ en fonction de n.
6. Proposez une expression par récurrence de $\mathscr{A}_{n+1}$ en fonction de $\mathscr{A}_n$, c_n et ℓ_n.
7. En utilisant votre calculatrice ou un tableur, observez les valeurs prises par $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{A}_n$ lorsque n devient grand.

Exercices du diaporama 2

Les exercices de ce chapitre demandent un peu de manipulation algébrique. Vous devez donc connaitre les règles de calcul sur les puissances, savoir développer et simplifier une expression, factoriser une expression, etc.
Un "*kit de survie algébrique*" vous sera distribué en classe. N'hésitez pas à le consulter si le besoin s'en fait sentir : à force de pratique, tout deviendra naturel.

Exercice 1 : Un peu de calculs ...

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n^2 + 3n + 1$. Écrivez l'expression de u_{n+1} puis simplifiez-la sous la forme $u_{n+1} = an^2 + bn + c$. Calculez ensuite $u_{n+1} - u_n$.
2. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 4^n$. Calculez $u_{n+1} - u_n$.
3. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3^{2n}$. Écrivez l'expression de u_{n+1} puis simplifiez-la sous la forme $u_{n+1} = a \times u_n$. En déduire $u_{n+1} - u_n$.
4. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5^{3n+1}$. Écrivez l'expression de u_{n+1} puis simplifiez au maximum celle de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
5. Écrivez sous la forme $a \times b^n$ la suite de terme général $u_n = \frac{2\times 3^{n+1} \times 5^{3n}}{4^{2n-1}}$.

Exercice 2 : Monotonie d'une suite.
Étudiez la monotonie des suites dont le terme général est donné ci-dessous. Un petit dessin est le bienvenu en cas de difficulté calculatoire. Mais il vous donnera seulement l'idée, pas la preuve !

1. $u_n = -3n + 10$
2. $u_n = 0{,}01n - 20$
3. $u_n = n^2 - 2n + 1$
4. $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
5. $u_n = -2 \times 5^n$
6. $u_n = -2 \times 5^{-n}$
7. $u_n = (-2)^n$

Exercice 3 : Majorée, minorée, bornée ?
Reprenez les suites définies à l'exercice 2, et précisez si les suites sont minorées (donnez un minorant), majorées (donnez un majorant), bornées (donnez un majorant et un minorant) ou non bornées (donnez une justification sommaire : vous n'avez pas encore tous les outils dans certains cas).
N'hésitez pas à utiliser votre calculatrice pour émettre des conjectures.