Feuille d'exercices

Prof : Yannick Le Bastard Classe : Première spé maths Année : 2024-2025

Rappels de cours : Probabilités conditionnelles.

Soient A et B deux événements liés à une expérience aléatoire d'univers fini Ω. On suppose que $P(A) > 0$. On appelle probabilité que B soit réalisé, *sachant que* A l'est, le réel de $[0;1]$ noté $P_A(B)$ et défini par :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

P_A définit une nouvelle probabilité de Ω dans $[0;1]$ appelée **probabilité conditionnelle sachant** A. Elle quantifie la réalisation d'un événement sachant que l'événement A est réalisé. Tout ce qui sort du périmètre de A n'est plus comptabilisé pour calculer la probabilité de réalisation de B.

Formule des probabilités totales : Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ un système complet d'événements, avec pour tout i, $P(A_i) > 0$. On a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(B) P(A_i)$$

Événements indépendants : Deux événements A et B sont **indépendants** si :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$$

Formule de Bayes : Soient A et B deux événements de probabilité non nulle, alors :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(B)P_B(A) + P(\bar{B})P_{\bar{B}}(A)}}$$

Plus généralement, si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est un système complet d'événements où tous les $P(A_i) > 0$, et B de probabilité non nulle, alors pour tout $j \in [\![1;n]\!]$:

$$\boxed{P_{A_j}(B) = \frac{P(B)P_B(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P_{A_i}(B)}}$$

Exercice n°1

Trois usines A, B et C produisent des pièces dont les proportions de défectueux sont respectivement 2%, 4% et 5%. Un magasin reçoit des pièces de chacune de ces usines en proportions respectives 30%, 40% et 30%. Une fois les pièces mélangées et stockées, le gérant en prélève une au hasard.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité à 10^{-4} près de :
   (a) tomber sur une pièce de l'usine B.
   (b) tomber sur une pièce non défectueuse provenant de l'usine A.
   (c) tomber sur une pièce défectueuse provenant de l'usine B ou sur une pièce non défectueuse provenant de l'usine C.
   (d) tomber sur une pièce défectueuse.
3. La pièce prélevée est défectueuse. Calculez la probabilité qu'elle provienne de l'usine B.

Exercice n°2

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 80]$.
Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.
Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.
Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrez que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.
2. Déterminez x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.
3. Déterminez x pour que les évènements "tirer un cube bleu" et "tirer un cube marqué d'un losange" soient indépendants.
4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

   Calculez la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Exercice n°3

Une urne contient neuf jetons rouges dont un est marqué "gagnant" et six jetons verts dont deux sont marqués "gagnant". On tire au hasard un jeton de cette urne et on note les événements :

- R :"le jeton tiré est rouge",
- V :"le jeton tiré est vert",
- G :"le jeton tiré est gagnant".

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité de tomber sur un jeton vert marqué gagnant.
3. Calculez la probabilité de tomber sur un jeton gagnant.
4. Le jeton est marqué gagnant. Calculez la probabilité que ce soit un jeton rouge.
5. On tire successivement *avec remise* deux jetons de cette urne : chaque jeton vert gagnant rapporte 2€, chaque jeton rouge rapporte 5€ et chaque jeton (rouge ou vert) non marqué fait perdre 1€. On appelle X la fonction (appelée *variable aléatoire*) qui donne le gain algébrique à ce jeu.
   (a) Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   (b) Précisez les valeurs prises par X (que l'on notera $x_1,\ x_2,\dots$) et la probabilité de prendre chacune de ces valeurs sous la forme d'une fraction. On résumera ceci dans un tableau appelé *loi de probabilité* de X.
   (c) Calculez le gain moyen à ce jeu.
6. même question que précédemment, mais en supposant le tirage *sans remise*.

Exercice n°4

Une urne contient 6 boules blanches, 3 boules bleues, 4 boules rouges et 5 boules noires toutes indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne.

1. Modélisez la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
2. Calculez la probabilité de tomber sur 3 boules bleues.
3. Calculez la probabilité de tomber sur 3 boules de même couleur.
4. Calculez la probabilité de tomber sur 3 boules de couleurs différentes.
5. On gagne 50€ si notre tirage est unicolore, 20€ si nous avons deux boules bleues seulement, et on perd 10€ sinon. Quel est le gain moyen à ce jeu ?

Exercice n°5

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

   On considère les évènements suivants :

   - D : "Le candidat est retenu sur dossier",
   - E_1 : "Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien",
   - E_2 : "Le candidat est recruté".

   (a) Modélisez la situation par un arbre de probabilités.

   (b) Calculez la probabilité de l'évènement E_1.

   (c) On note F l'évènement : "Le candidat n'est pas recruté".
   Démontrez que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

   Calculez la probabilité qu'au moins un des cinq amis soient recruté. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum N de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$? Vous pourrez utiliser l'outil TICE pour répondre à cette question.