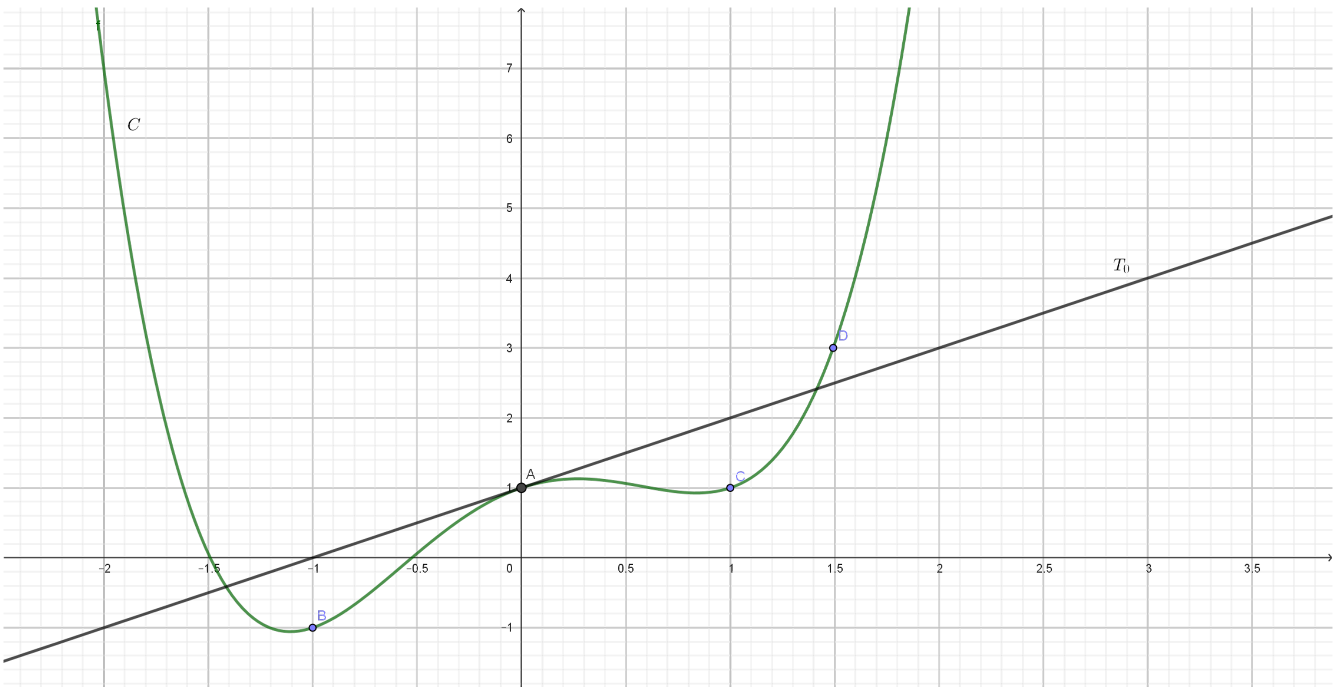
Devoir surveillé : première spécialité mathématiques

Durée : 110 minutes

26 mars 2023

Exercice 1 (sur 10 points)

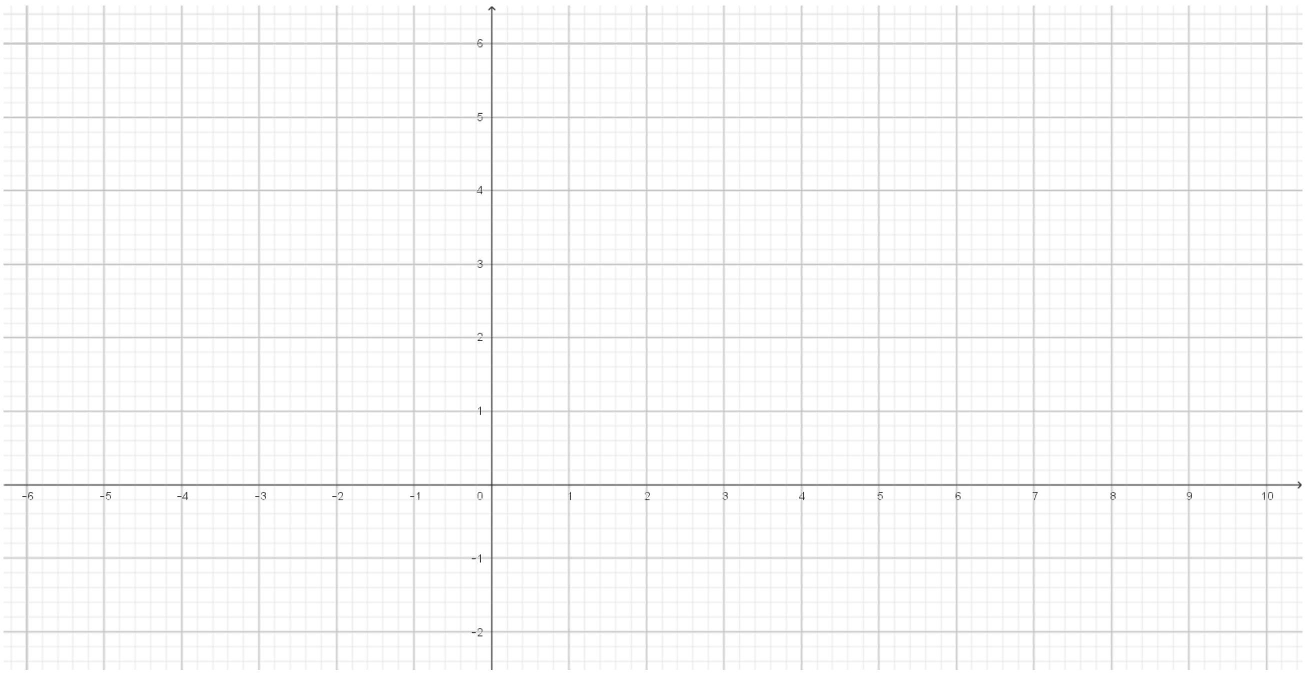
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique $\mathcal{C}$ est donnée ci-dessous. On a également tracé la droite T_0 tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0, les points B, C et D de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives -1, 1 et $1,5$.



1. Déterminez graphiquement l'équation de T_0.
2. Résoudre graphiquement les équations :
   (a) $f(x) = 0$ (b) $f'(x) = 0$.
3. La fonction f a pour expression $f(x) = x^4 - 2x^2 + x + 1$. Calculez les coordonnées des points B et C et déterminez l'équation de la droite (BC).
4. Justifiez que T_0 et (BC) sont parallèles.
5. Calculez $f'(x)$.
6. Déterminez l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point D et la tracez avec soin. Vous laisserez vos traits de construction apparents.
7. **Démontrez** (il ne suffit pas de "le voir sur le dessin") que la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ à la fois en B et en C.

Exercice 2 (sur 10 points)

1. Dessinez dans le repère ci-dessous le graphe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f dérivable sur $I = [-5; 7]$ telle que :
   $f(-5) = 6$; $f(-2) = 2$; $f(3) = -1$ et les points $A(0; 1)$ et $B(7; 5)$ appartiennent à $\mathcal{C}_f$.
   $f'(-5) = -2$, $f'(-2) = f'(3) = 0$ et $f'(7) = -3$.
   f est décroissante sur $[-5; 3]$ et croissante sur $[3; 7]$.

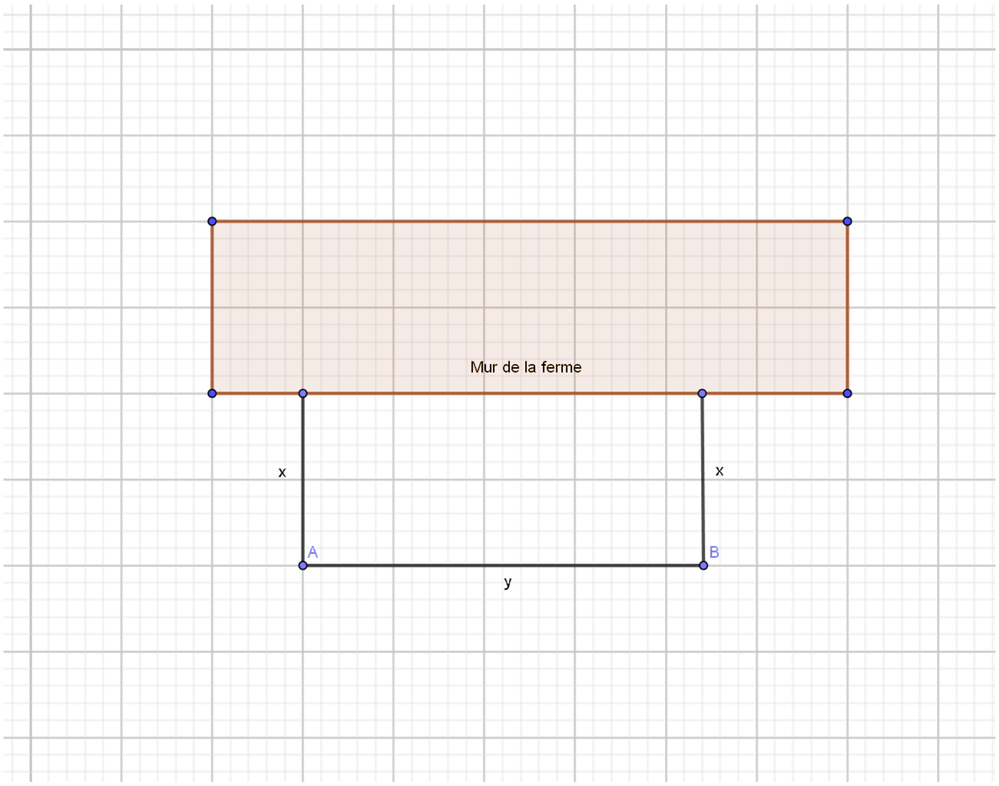


2. Calculez la dérivée des fonctions suivantes (on ne vous demande pas de justifier leur dérivabilité sur l'intervalle I précisé).
   (a) $f(x) = \dfrac{10x + 4}{2 - x}$ sur $I =]2; +\infty[$.
   (b) $f(x) = 5\sqrt{3x + 4}$ sur $I = [0; 10]$.
   (c) $f(x) = 6 - 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{4}x^4 + \sqrt{2}x^2 - 10^3$ sur $I = \mathbb{R}$.
3. En revenant à la définition du nombre dérivé, calculez $f'(2)$, où f est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 - x + 1$.
4. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ si $x < 1$ et $f(x) = 2x - 1$ si $x \geq 1$ est-elle dérivable en 1 ? Justifiez précisément.

Exercice 3 (sur 10 points)

Problème 1

Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². Où doit-il placer les piquets A et B pour que la longueur de la clôture soit minimale ?

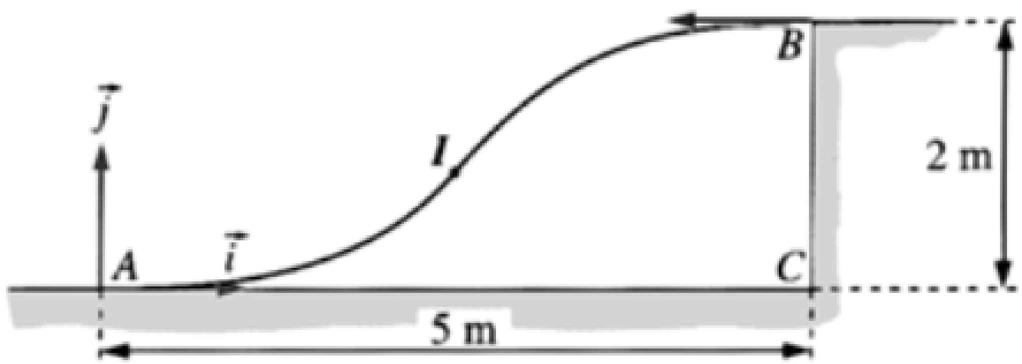


La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus. On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les deux piquets A et B.

1. Sachant que l'aire du poulailler est 392 m², exprimer y en fonction de x.
2. Démontrez que la longueur $\ell(x)$ du grillage est $\ell(x) = \dfrac{2x^2 + 392}{x}$.
3. Calculez $\ell'(x)$ et dressez le tableau de variations de ℓ sur $]0; +\infty[$.
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale. Précisez cette longueur.

Problème 2

Pour faire franchir à des chariots une marche de deux mètres de haut, sur une distance horizontale de cinq mètres, on cherche à construire un toboggan.
La courbe $\mathcal{C}$, qui est une vue en coupe du toboggan, doit obéir aux contraintes suivantes :
- la courbe contient les points A, B et le milieu I de [AB] ; - la fonction définissant la courbe dans le repère $(A; \vec{i}; \vec{j})$ est dérivable ;
- les demi-tangentes en A et B sont horizontales (pour se raccorder sans « angle » avec le plan du sol).



Démontrez qu'il existe une unique fonction polynôme du troisième degré $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, répondant aux conditions précédentes.