Suites numériques

3 : Notion de limite

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

July 20, 2024

Limite infinie

Exemple 1

Définissons pour tout entier naturel n la suite (u_n) de terme général $u_n = n^2$.

Nous allons étudier le *comportement asymptotique de* (u_n), c'est-à-dire les valeurs u_n prises par (u_n) lorsque n devient grand. Nous pouvons déjà commencer par calculer les premiers termes :

n	0	1	2	3	4	5	10	20	50	100
u_n	0	1	4	9	16	25	100	400	2500	10^4

Il semble que plus n grandisse, plus les termes u_n deviennent grands ; on pourrait même dire peuvent dépasser à un moment donné toute valeur fixée à l'avance, aussi grande soit-elle ...

On dira que **la suite** (u_n) **tend vers** $+\infty$ et on écrira : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

Limite infinie

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel strictement positif A, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n sont supérieurs à A (resp. inférieurs à $-A$).

Vous n'avez pas à maîtriser cette définition par cœur en classe de première, mais en revanche, subodorer qu'une suite tend vers $+\infty$ à l'aide de sa représentation graphique ou d'une table de valeurs fait partie de vos prérogatives.

Et bonne nouvelle pour les fans de programmation, déterminer à l'aide du logiciel Python un rang à partir duquel les termes d'une suite croissante (resp. décroissante) dépassent (resp. passent sous) un seuil donné est au programme !

Limite infinie

Donnons immédiatement une application : on admettra le théorème qui nous assure que **toute suite croissante et non majorée, tend vers** $+\infty$.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + n^2$.

1. La suite (u_n) est-elle définie par récurrence ou de manière explicite ?
2. Justifiez que la suite (u_n) est croissante.
3. On admettra que la suite (u_n) n'est pas majorée. Nous verrons plus tard comment démontrer ce résultat par l'absurde.
   Écrivez un script en Python qui détermine le plus petit entier naturel N à partir duquel $u_n > 5000$.

Limite infinie

Solution de l'exemple 2

1. La suite (u_n) est définie par récurrence : on a u_0 donné et une relation de la forme $u_{n+1} = f(n, u_n)$ valable pour tout entier naturel n.
2. Il est clair que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.
3. On admet donc que la suite (u_n) tend vers $+\infty$, autrement dit, dépasse n'importe quel nombre (5000 ici) à partir d'un certain rang N.
   Analyse : Nous avons besoin d'une variable n qui partant de $n = 0$ va s'incrémenter de 1 *tant que* $u_n \leq 5000$ et aussi d'une variable u à laquelle on affecte la valeur u_n.

   On affiche alors la première valeur de n pour laquelle $u > 5000$.
   Et nous sommes certains que tous les termes suivants vont dépasser strictement 5000 par croissance de la suite (u_n).
   Nous voilà fin prêts à coder !

Solution de l'exemple 2

4. Un code classique :

```
"""
Author : Le Bastard Yannick
Programme test qui renvoie le rang minimal
"""
n, u = 0, 1              #initialisation de n et de u0
while u < 5000 :         #boucle conditionnelle
    u = u + n**2        #relation de recurrence
    n = n + 1            #increment de n

print("N = ", n)         #affichage de N
```

On trouve $N = 26$.

Limite infinie

Donnons une illustration graphique de la situation précédente. On représente pour une fois le nuage de points $M_n(n; u_n)$ même si notre suite est définie par récurrence.

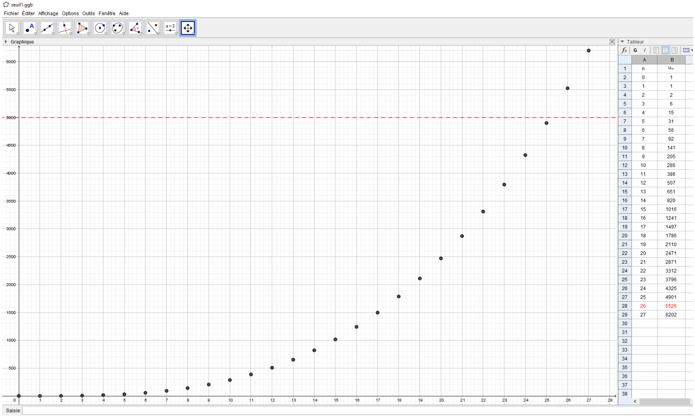


Figure: Seuil N de dépassement

Suites sans limite

Parfois, les termes d'une suite (u_n) semblent s'accumuler autour de certaines valeurs précises, mais pas nécessairement d'une en particulier.

Exemple 3

Considérons la suite $\mathbf{u}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

De manière évidente : $u_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Tous les termes d'indice pair de $\mathbf{u}$ sont égaux à 1 et tous les termes d'indice impair de $\mathbf{u}$ sont égaux à -1. On peut écrire que pour tout entier naturel n, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.

Dans un certain sens, une infinité de termes de la suite $\mathbf{u}$ s'accumulent "autour de" 1 et de -1, en fait exactement en 1 et -1 dans le cas présent.

Suites sans limite

Considérons la suite $\mathbf{u}$ de terme général $u_n = \sin n$. La fonction sinus (que vous découvrirez cette année) est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et prend pour valeurs tous les réels de $[-1;1]$.
Qu'en-est-il si nous restreignons l'ensemble de définition de la fonction sinus à $\mathbb{N}$? Il semble que les termes u_n puissent s'approcher de n'importe quelle valeur $y \in [-1;1]$.

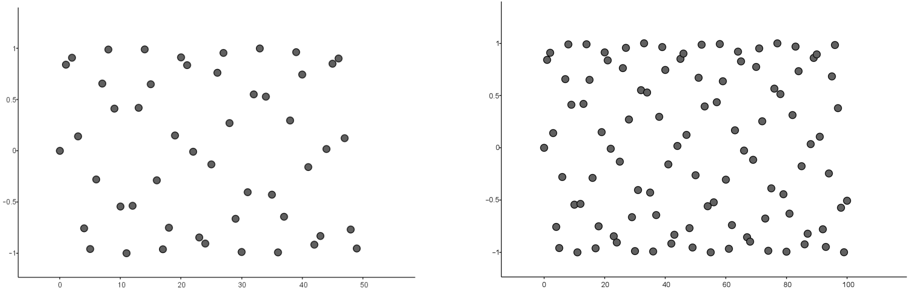


Figure: Nuage de points

Limite finie

Intéressons-nous à la suite **u** définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \frac{1}{n^2}$. Nous allons étudier le *comportement asymptotique de* **u**, c'est-à-dire les valeurs u_n prises par **u** lorsque n devient grand. Nous pouvons déjà commencer par calculer les premiers termes à 10^{-3} près :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	3	$2,25$	$2,111$	$2,062$	$2,04$	$2,028$	$2,02$	$2,016$	$2,012$

Il semble que plus n grandisse, plus les termes u_n se rapprochent de $\ell = 2$ (en décroissant strictement).

Il en va de même pour la suite **v** définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ dont les termes v_n se rapprochent de $\ell = 2$ quand n devient grand, mais en oscillant de plus en plus faiblement autour de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	$2,5$	$1,667$	$2,25$	$1,8$	$2,167$	$1,86$	$2,13$	$1,89$

Limite finie

On peut formaliser l'intuition précédente en approchant d'aussi près que l'on veut la valeur ℓ par des termes u_n de la suite $\mathbf{u}$, pourvu que n soit suffisamment grand.

Définition 2

Soit $\mathbf{u}$ une suite réelle. On dit que le réel ℓ est **limite** de la suite $\mathbf{u}$ si pour tout intervalle ouvert $]a; b[$ contenant ℓ il existe un rang N à partir duquel tous les u_n appartiennent à $]a; b[$.

Sans perte de généralité (réfléchissez bien pourquoi), on peut supposer que l'intervalle $]a; b[$ est de la forme $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ $(\epsilon > 0)$ i.e centré en ℓ.

La définition précédente dit que si l'on se donne un petit intervalle ouvert centré en ℓ, tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux, sont compris dans cet intervalle.

Limite finie

Exemple 4

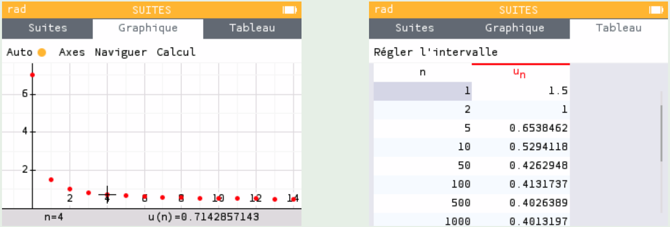
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{2n+7}{5n+1}$.

1. Programmez cette suite sur votre calculatrice et faites une conjecture sur sa monotonie et sa limite éventuelle ℓ.
2. **Démontrez** que pour tout entier naturel n : $u_n > \frac{2}{5}$.
3. **Démontrez** que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-31}{(5n+1)(5n+6)}$ et en déduire le sens de variation de (u_n).
4. Trouvez le plus petit entier naturel N à partir duquel $u_n < \ell + 10^{-3}$. Vous pourrez écrire un programme Python ou pour les plus courageux, résoudre une inéquation.

Limite finie

Exemple 4 (correction)

1. Il semble que la suite (u_n) soit décroissante et ait pour limite $\ell = 0,4$.



n	u_n
1	1.5
2	1
5	0.6538462
10	0.5294118
50	0.4262948
100	0.4131737
500	0.4026389
1000	0.4013197

Figure: Nuage de points

2. Question technique faisant appel à des méthodes vues en seconde : pour prouver que $A \geq B$, on peut démontrer que $A - B \geq 0$. Surtout si A et B sont des fractions. On devra alors réduire au même dénominateur leur différence $A - B$.

Limite finie

Exemple 4 (correction)

Pour tout entier naturel n :

$u_n - \frac{2}{5} = \frac{2n+7}{5n+1} - \frac{2}{5} = \frac{5(2n+7)-2(5n+1)}{5(5n+1)} = \frac{33}{5(5n+1)} > 0.$

Donc $u_n > \frac{2}{5} = 0,4$.

3. Pour tout entier naturel n :

   $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+7}{5(n+1)+1} - \frac{2n+7}{5n+1} = \frac{2n+9}{5n+6} - \frac{2n+7}{5n+1}$, soit :

   $u_{n+1} - u_n = \frac{(5n+1)(2n+9)-(2n+7)(5n+6)}{(5n+1)(5n+6)}$ et après simplifications :

   $u_{n+1} - u_n = \frac{-31}{(5n+1)(5n+6)}$.

On en déduit que la suite (u_n) est strictement décroissante.

Remarque : Au cours de la question 1, nous avons-prouvé que $0 < u_n - \frac{2}{5} = \frac{33}{5(5n+1)}$. En quoi est-ce intéressant (intuitivement) ?

Limite finie

Exemple 4 (correction)

4. Le programme n'est qu'une variante de l'exemple 2.

```
def f(n):
    return (2*n+7)/(5*n+1)

eps = 0.05
n, u = 0, f(n)
while u >= 0.4 + eps :
    n = n + 1
    u = f(n)

print("N = ", n)
```

On trouve $N = 1320$

Limite finie

La notion de "bande de sécurité" centrée en ℓ dans laquelle tous les termes de la suite (u_n) sont compris à partir d'un certain rang est très visuelle pour les suites non monotones. Par exemple, on peut prouver que la suite de terme général $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ est de limite nulle.

On s'est donné ici pour bande de sécurité l'intervalle $[-0,1; 0,1]$.

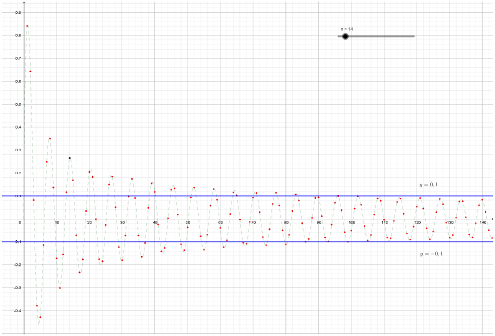


Figure: bande de sécurité

Synthèse

Définitions à mettre en situation

1. On dit qu'une suite réelle (u_n) a pour limite $+\infty$ si pour tout réel $A > 0$ (notre plafond), on peut trouver un entier naturel N (qui dépend donc de A) à partir duquel tous les termes u_n dépassent A : pour tout $n \geq N \ : \ u_n \geq A$.
2. On dit qu'une suite réelle (u_n) a pour limite $-\infty$ si pour tout réel $A > 0$, on peut trouver un entier naturel N (qui dépend donc de A) à partir duquel tous les termes u_n sont inférieurs à $-A$: pour tout $n \geq N \ : \ u_n \leq -A$.
3. On dit qu'une suite réelle (u_n) a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert $]a : b[$ contenant ℓ (notre bande de sécurité), on peut trouver un entier naturel N à partir duquel tous les termes u_n appartiennent à $]a : b[$: pour tout $n \geq N \ : \ u_n \in]a; b[$.
4. Certaines suites n'ont pas de limite (ni finie, ni infinie).