

Suites numériques

Variations & autres propriétés

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

July 19, 2024

Propriétés d'une suite numérique

Définitions

- 1 On dit que (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n : $u_n \leq M$ (la suite est *plafonnée*).
- 2 On dit que (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n : $u_n \geq m$ (la suite a un *plancher*).
- 3 On dit que (u_n) est **bornée** si (u_n) est à la fois majorée et minorée.
- 4 On dit que (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_{n+1} \geq u_n$).

Théorème

Soit (u_n) une suite définie **de manière explicite** pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$. Alors (u_n) hérite des propriétés de f : si f est croissante (resp. décroissante, resp. majorée, resp. minorée) sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est aussi croissante (resp. décroissante, resp. majorée, resp. minorée).

Propriétés d'une suite numérique

Remarque : (u_n) est bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n , on ait $|u_n| \leq M$.

Exemples

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) les suites définies sur \mathbb{N} respectivement par $u_n = \frac{1}{n+1}$, $v_n = n$ et $w_n = (-1)^n$. Précisez dans chacun des cas si les suites sont monotones, majorées, minorées, bornées.

solution

- 1 (u_n) est strictement décroissante et bornée.
- 2 (v_n) est strictement croissante, minorée mais pas majorée.
- 3 (w_n) n'est ni croissante, ni décroissante mais bornée.

Mini défi : donnez un exemple de suite non monotone et non bornée.

Propriétés d'une suite numérique

Le théorème précédent est faux pour les suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

f croissante $\nRightarrow (u_n)$ croissante.

f décroissante $\nRightarrow (u_n)$ décroissante.

On définit (u_n) par $u_0 = 16$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ et (v_n) par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ où f est définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, donc f croissante et g est définie par $g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$, donc g décroissante.

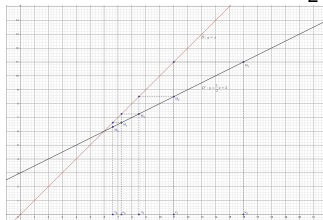


Figure: Or (u_n) décroissante

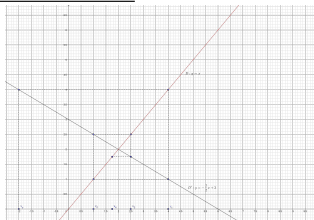


Figure: Et (v_n) n'est même pas monotone !

Comment donc étudier les variations d'une suite ?

A ce stade de l'année, nous disposons de peu de fonctions dont nous connaissons le sens de variation et qui pourraient nous aider à étudier les suites définies de manière explicite : les fonctions de référence vues en seconde.

Vous en découvrirez de nouvelles au cours de cette année de première. Quant aux suites définies par récurrence, mis à part quelques cas particuliers, leur étude est plus délicate. Elle nécessite notamment de connaître le **raisonnement par récurrence** étudié en terminale dans l'option maths spécialité.

Observez-les exemples qui suivent, ils sont bien plus parlants qu'un long discours.

Méthodes d'étude des varivariations d'une suite

Rappelons qu'une suite (u_n) est :

- ① croissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
- ② décroissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthodes d'étude des varivariations d'une suite

Rappelons qu'une suite (u_n) est :

- ① croissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
- ② décroissante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \leq u_n$.

Cette notion a un sens à partir d'un certain rang : les premiers termes u_n d'une suite peuvent varier de manière erratique, mais à partir d'un certain moment, disons pour n dépassant un certain entier naturel N , on aura $u_{n+1} \geq u_n$ ou $u_{n+1} \leq u_n$.

Deux méthodes

On ne traite que le cas des suites croissantes. Vous adapterez au cas des suites décroissantes. Pour prouver qu'une suite (u_n) est croissante :

- ① On prouve directement que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} \geq u_n$.
- ② Si l'on sait que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on prouve que pour tout entier naturel n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque.** Cette petite phrase n'a l'air de rien mais elle est vitale ! Alors :

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} - 2^n = 2 \times 2^n - 2^n = 2^n > 0.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode 2 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque.** Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = \frac{2 \times 2^n}{2^n} = 2 > 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Pour cette suite et plus généralement pour toutes les suites de la forme a^n ($a > 0$), les deux méthodes fonctionnent.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{3}n + 2$. Alors (u_n) est strictement croissante.

Méthode 1 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque.** Alors :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+1) + 2 - \left(\frac{1}{3}n + 2\right). \text{ Ne pas oublier les parenthèses !}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3}n - 2 = \frac{1}{3} > 0.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

Méthode 2 : **Donnons-nous un entier naturel n quelconque.** Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{3}(n+1) + 2}{\frac{1}{3}n + 2} = \frac{\frac{1}{3}n + \frac{1}{3} + 2}{\frac{1}{3}n + 2} = \frac{(\frac{1}{3}n + 2) + \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}n + 2} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}n + 2} > 1.$$

On en déduit que la suite (u_n) est strictement croissante.

La méthode 1 est nettement plus simple !

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Un exemple croustillant

Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 2^n - 2n$. Alors (v_n) est strictement croissante à partir d'un certain rang.

La seconde méthode est inadaptée : pourquoi ?

Essayons la première méthode : donnons-nous un entier naturel n quelconque et évaluons le signe de $v_{n+1} - v_n$.

$$v_{n+1} - v_n = (2^{n+1} - 2(n+1)) - (2^n - n) = 2 \times 2^n - 2n - 2 - 2^n + n$$

$$v_{n+1} - v_n = 2^n - n - 2. \text{ Testons différentes valeurs de } n :$$

$$\text{Pour } n = 0 : v_{n+1} - v_n = v_1 - v_0 = -3 < 0.$$

$$\text{Pour } n = 1 : v_{n+1} - v_n = v_2 - v_1 = -1 < 0.$$

$$\text{Pour } n = 2 : v_{n+1} - v_n = v_3 - v_2 = 0.$$

$$\text{Pour } n = 3 : v_{n+1} - v_n = v_4 - v_3 = 3 > 0.$$

$$\text{Pour } n = 4 : v_{n+1} - v_n = v_5 - v_4 = 10 > 0.$$

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Seulement, **il est totalement abusif de généraliser**. Ce n'est pas l'observation de quelques termes qui prouve que pour tous les entiers $n \geq 3 : v_{n+1} - v_n > 0$.

Mais nous avons gagné une information : celle du rang à partir duquel (u_n) serait strictement croissante. Programmez sur votre calculatrice la suite de terme général $2^n - n - 2$ et observez la table des valeurs.

Attention, tout n'est pas si simple... en première !

Il semble que la suite (v_n) soit strictement croissante à partir du rang $N = 3$.

Seulement, **il est totalement abusif de généraliser**. Ce n'est pas l'observation de quelques termes qui prouve que pour tous les entiers $n \geq 3$: $v_{n+1} - v_n > 0$.

Mais nous avons gagné une information : celle du rang à partir duquel (u_n) serait strictement croissante. Programmez sur votre calculatrice la suite de terme général $2^n - n - 2$ et observez la table des valeurs.

Nous venons d'effectuer ce qu'on appelle "une conjecture". Pour la prouver, comme la suite $w_n = 2^n - n - 2$ est définie de manière explicite, il suffirait par exemple d'étudier la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 2^x - x - 2$ et justifier qu'elle prend des valeurs strictement positives si $x \geq 3$. Mais qu'est ce que 2^x pour x réel ???

On pourrait aussi utiliser un raisonnement par récurrence : il vous faudra attendre la classe de terminale spécialité maths.

Résumé

Pour étudier une suite définie de manière explicite $u_n = f(n)$:

- 1 On peut étudier la fonction f associée (si elle est assez simple) pour en déduire des renseignements sur la suite (u_n) : majorée, minorée, croissante ...
- 2 Si ce n'est pas possible, on peut essayer de retrouver toutes ces propriétés "à la main". Par exemple quid de $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n \geq 1}$?

Pour étudier une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$:

- 1 On peut, si la suite est très simple, l'exprimer de manière explicite et on est ramené au cas précédent.
- 2 Juste émettre des conjectures à l'aide d'un graphique ou d'un tableau de valeurs et attendre la terminale !