Modélisation mathématique : épisode 3

Tout ce que vous n'avez jamais voulu savoir sans jamais oser le demander !

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

May 27, 2024

Les sentiers mathématiques : randonnée exceptionnelle

Sommaire

0. Introduction

Nous sommes habitués lors de la modélisation probabiliste d'un énoncé faisant intervenir une expérience aléatoire, d'introduire les notions d'univers, d'événement et de variable aléatoire réelle. Il en ressort néanmoins une impression statique de l'expérience aléatoire considérée. Le point de vue qui sera adopté ici est celui de la dynamique, avec une évolution dans le temps.

Considérons par exemple la trajectoire d'une poussière sur la surface d'une nappe d'eau. On peut découper cette surface en n carrés élémentaires puis observer la présence de la poussière dans chacun de ces carrés au cours du temps, qui lui-même peut être discrétisé. Nous obtenons alors ce que nous définirons plus loin comme un *processus aléatoire discret*. Ainsi, nous qualifierons l'univers Ω d'*espace des états*.

0. Introduction

L'étude des transitions de la particule d'un état à l'autre a des représentations commodes : à l'aide de **graphes orientés et pondérés** ou bien **matriciellement**. Ces deux approches sont complémentaires et l'utilisation de l'une plutôt que l'autre dépend avant tout du cas considéré. Notons que généralement, il est préférable de commencer par l'approche graphe probabiliste avant de passer à l'approche matricielle dans un souci de visualisation des états et de leurs transitions.

1. Arbres de probabilités (rappels)

Nous sommes tous familiers de l'utilisation d'arbres de probabilités pour modéliser une situation dynamique : tirages successifs avec ou sans remise notamment. Rappelons les règles usuelles :

Règle 1 : La probabilité, partant d'un noeud donné de l'arbre de réaliser un parcours donné, est égale au produit de toutes les probabilités de transition (inscrites sur les segments) le long de ce parcours.

Règle 2 : La probabilité d'aller de A à B est la somme des probabilités de tous les chemins conduisant de A à B.

Règle 3 : La somme des probabilités des segments issus d'un même noeud est égale à 1.

1. Arbres de probabilités (rappels)

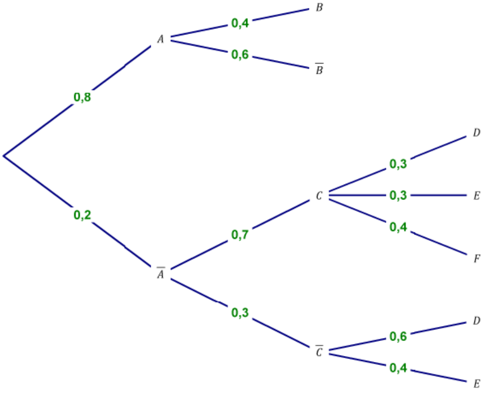
1. La règle 1 n'est rien d'autre que la traduction de la formule des probabilités composées : Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) > 0$, alors :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n+1}) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap \ldots A_n}(A_{n+1})$$

2. La règle 2 n'est que la traduction de $P(C) = \sum_{\{i;x_i \in C\}} P(x_i)$, où

$\Omega = \{x_i \; ; \; i \in I\}$.

3. La règle 3 est la traduction de la formule des probabilités totales.



$$\begin{aligned} P(D) &= P(\overline{A} \cap C \cap D) + P(\overline{A} \cap \overline{C} \cap D) \\ &= P(\overline{A})P_{\overline{A}}(C)P_{\overline{A}\cap\overline{C}}(D) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(\overline{C})P_{\overline{A}\cap\overline{C}}(D) \\ &= 0,2 \times 0,7 \times 0,3 + 0,2 \times 0,3 \times 0,6 \\ &= 0,078 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant généraliser cette notion d'arbre probabiliste à celle de **graphe probabiliste** et par là même, définir la notion d'**états**.

Mais d'abord, un petit rappel sur les suites géométriques :

1. Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
2. Si $q \neq 1$ on a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

   En particulier, si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1 - q}$.

   On notera $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$.
3. Si $|q| < 1$, alors on prouve que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1 - q)^2}$.

Un exemple modèle : Le joueur au va-tout

Tout va mal pour Dédé l'embrouille : il doit rembourser 5000€ à son bookmaker Tony le balafré, mais ne dispose que de 1000€.

Très compréhensif, Tony lui propose de rembourser sa dette avec le jeu suivant : à chaque tour, Dédé lance une pièce honnête. S'il fait Pile, il gagne le tour.

- Si Dédé dispose de 1000€ ou 2000€, il doit tout miser,
- Si Dédé dispose de 2000€ ou 3000€, il doit miser le complément à 5000€.

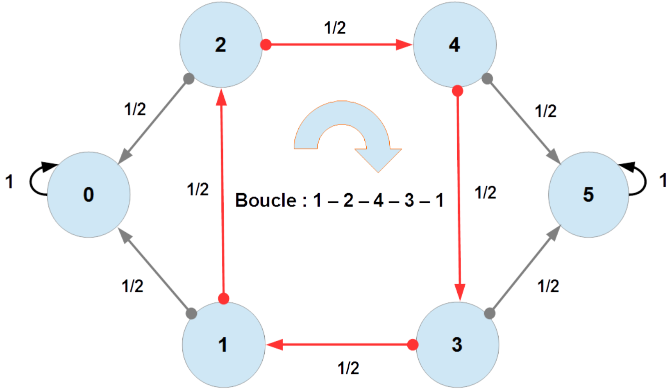
Le jeu s'arrête si Dédé tombe à 0€ ou gagne les 5000€.

Mais alors, quelles sont les chances de Dédé de s'en sortir ?

Et en moyenne, combien de tours dure ce jeu ?

2. Chaines de Markov et graphes probabilistes

La règle même de ce jeu nous invite à modéliser la situation à l'aide d'un graphe probabiliste. Nous inscrirons dans chacun des cercles l'état correspondant à la somme acquise par Dédé, en omettant les zéros.



L'état initial est numéroté 1 (1000€ initiaux de Dédé) ; les états finaux sont numérotés 0 (0€) et 5 (5000€).
Dédé gagne si partant de l'état 1, il arrive à l'état 5.

Les chemins menant au gain sont ceux qui partant de 1 ont pour terminaison 5, soit :

- C_1 : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$
- C_2 : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5$

Tout ceci précédé de n boucles, où n est un entier naturel éventuellement nul et la **boucle** le chemin $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, de probabilité $q = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$.

En admettant qu'une réunion infinie dénombrable d'événements en est encore un (ce qui est le cas), et posant :

- $C_n^1 = \text{n boucles} \cap C_1$
- $C_n^2 = \text{n boucles} \cap C_2$

nous pouvons dire que :

$$\text{Gain} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n^1 \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n^2 \ \ \text{(réunion disjointe)}.$$

Par incompatibilité de $\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n^1$ et de $\bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n^2$, nous obtenons :

$$P(\text{Gain}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{16}\right)^n \times \frac{1}{8}}_{n \text{ boucles suivi de } C_1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{16}\right)^n \times \frac{1}{16}}_{n \text{ boucles suivi de } C_2} = \frac{1}{5}.$$

Bref, ce pauvre Dédé n'a qu'une chance sur 5, soit 20% de survivre !

2. Chaines de Markov et graphes probabilistes

Bref, ce pauvre Dédé n'a qu'une chance sur 5, soit 20% de survivre !

Le graphe précédent nous invitait donc à considérer une réunion infinie (dénombrable) d'événements obtenus via la boucle de notre graphe ! Autrement dit, il est théoriquement possible de boucler indéfiniment !!!

La probabilité d'un tel événement est nulle. On parle d'événement *quasi-impossible*. Mais il peut se produire !

Imaginons par exemple un curseur qui s'arrête arbitrairement sur un nombre réel compris entre 0 et 1. Pour qu'il s'arrête exactement sur le réel x, il faut et il suffit que dans le développement décimal propre de x, toutes les décimales coïncident.

Or chacune de ces décimales coïncide avec celles de x avec une probabilité de $1/10$. Par principe multiplicatif, la probabilité de tomber exactement sur x est égale à $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$.

L'exemple précédent est déjà riche d'enseignement. Nous constatons en effet que les états 0 et 5 jouent un rôle particulier par rapport aux états 1, 2, 3 et 4. Une fois atteints, on y reste. Nous parlerons d'états absorbants.

Nous considérerons toujours ultérieurement une *suite* (ce qui suppose le temps discrétisé) d'expériences aléatoires dont les résultats, que nous appellerons états, appartiendront à un ensemble au plus dénombrable. Nous n'étudierons donc pas des processus continus. Restons discrets !

Définitions

1. On note S l'ensemble des **états** qu'il est possible de visiter au cours de notre suite d'expériences aléatoires. Nous supposerons cet ensemble fini ou infini dénombrable.

2. On appelle **probabilité de transition** de i vers j, et on note p_{ij} la probabilité de passer de l'état i à l'état j au cours d'un pas de temps. A priori, p_{ij} dépend de n et l'on devrait noter $p_{ij}(n)$, mais nous travaillerons uniquement sur des probabilités de transition indépendantes de l'instant considéré.

3. Un état i est dit **absorbant** s'il vérifie $p_{ii} = 1$. On note B l'ensemble des états absorbants de S et on l'appelle **le bord** de S.

4. On appelle **état intérieur** un élément de $S \setminus B$.

1. **Définition naïve** : La donnée de S, ensemble des états, des p_{ij}, probabilités de transitions entre états, ainsi que de l'état initial $(a_0, a_1, \dots)$ définit une **chaine de Markov**.

2. **Définition plus rigoureuse** : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble S des états que l'on peut supposer égal à $\mathbb{N}$. On dit que cette suite est une *chaine de Markov* si pour tout entier $n \geq 1$ et toute suite $(i_0, \dots, i_{n-1}, i, j)$ d'éléments de E tel que $P(B_n) := P(X_0 = i_0 \cap \dots \cap X_{n-1} = i_{n-1} \cap X_n = i) > 0$, on ait $P_{B_n}(X_{n+1} = j) = P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$.

   On peut comprendre ceci comme : dans l'évolution au cours du temps, l'état du processus à l'instant $n+1$ ne dépend que de celui-ci à l'instant n précédent, mais non de ses états antérieurs. Le processus est *sans mémoire*.

1. Une chaine de Markov est dite **absorbante** si son bord B est non vide, c'est-à-dire qu'il y a au moins un état absorbant.

2. Une chaine de Markov est dite **homogène** (au cours du temps) si la probabilité $P_{X_n=i}(X_{n+1} = j)$ ne dépend pas de $n \geq 0$. On la note p_{ij} et on l'appelle **probabilité de transition** (en une étape) de l'état i à l'état j.

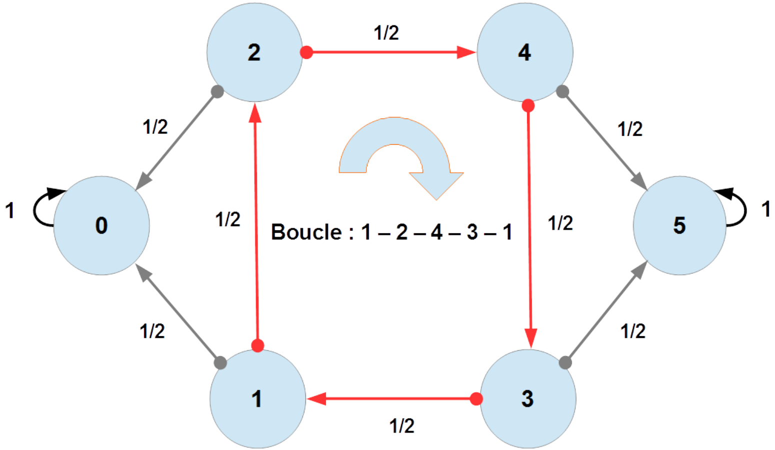
Règles de parcours sur un graphe probabiliste

Règle 1 : La probabilité, partant d'un état donné du graphe de réaliser un parcours donné, est égale au produit de toutes les probabilités de transition le long de ce parcours.

Règle 2 : La probabilité, partant d'un état intérieur i donné, d'atteindre un quelconque sous ensemble T du bord B est égale à la somme des probabilités de tous les chemins menant de i à T.

Règle 3 : La **durée moyenne** m_i des parcours aléatoires allant de l'état i au bord B est la moyenne pondérée des longueurs des parcours de i à B, chaque longueur de parcours ℓ_k étant pondérée par la probabilité p_k de ce parcours.

Calculons à titre d'exemple la durée moyenne du jeu précédent dont on redonne le graphe probabiliste :



2. Chaines de Markov et graphes probabilistes

$n \in \mathbb{N}$ désignant le nombre de boucles, les chemins menant à B sont :

- C_1 : n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$, de longueur $4n+3$ et de probabilité $\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$,
- C_2 : n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5$, de longueur $4n+4$ et de probabilité $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{n+1}$,
- C_3 : n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 0$, de longueur $4n+1$ et de probabilité $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$,
- C_4 : n boucles $\longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0$, de longueur $4n+2$ et de probabilité $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

2. Chaines de Markov et graphes probabilistes

On en déduit que le temps moyen d'absorption est égal à :

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{4n+4}{16}+\frac{4n+3}{8}+\frac{4n+2}{4}+\frac{4n+1}{2}\right]\left(\frac{1}{16}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{60n+26}{16}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^n \\
&= \frac{60}{16^2}\sum_{n\geq 1} n\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}+\frac{26}{16}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{16}\right)^n \\
&= \frac{60}{16^2}\frac{1}{(1-1/16)^2}+\frac{26}{16}\frac{1}{1-1/16}=2
\end{aligned}
$$

Non seulement la probabilité de gagner à ce jeu est de 0,2 mais de plus, il dure en moyenne deux lancers !

2. Chaines de Markov et graphes probabilistes

Nous allons maintenant nous donner de précieux outils des chaines de Markov : **les règles de la moyenne**.

Ces outils permettent de simplifier les règles de parcours présentées précédemment. Notamment la règle 3 de durée moyenne de parcours. On note $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des états.

On appelle **fonction de probabilité** la fonction définie sur S à valeurs dans $[0; 1]$, qui à chaque état i associe sa probabilité d'être absorbée dans un sous-ensemble $T \subset B$. On la note $p_i^{(T)}$ ou, si aucune confusion n'est à craindre p_i.

La formule des probabilités totales nous dit alors que pour tout état intérieur i :

$$\boxed{p_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_k \quad (1)}$$

Pour le bord : $p_i = 1$ si $i \in T$ et $p_i = 0$ si $i \in B \setminus T$.

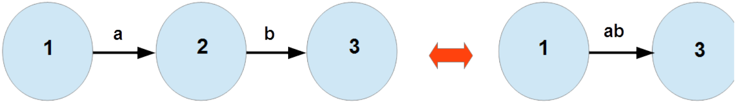
Règles de la valeur moyenne

1. **Première règle de la valeur moyenne** : La valeur de la fonction de probabilité en un état intérieur i est la moyenne pondérée de ses valeurs en les états voisins de i.

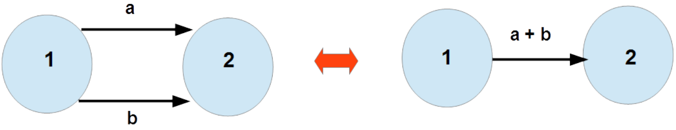
2. **Seconde règle de la valeur moyenne** : La valeur du délai d'absorption en un état intérieur i est de 1 plus la moyenne pondérée des délais d'absorption en les états voisins.

2. Chaines de Markov et graphes probabilistes

Les premières et secondes règles de parcours nous permettent de simplifier avantageusement certains graphes probabilistes. Citons notamment :

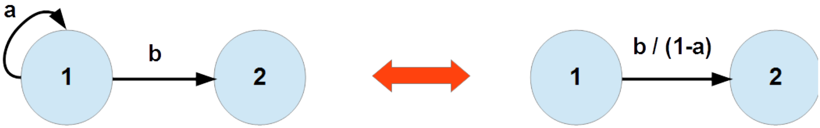


(a) suppression d'un nœud (règle 1 de parcours)

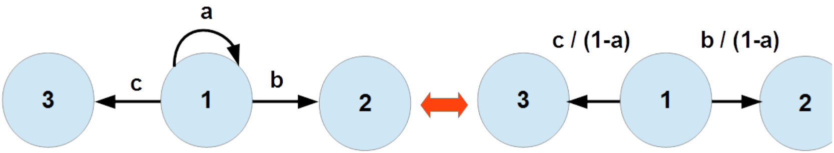


(b) réunion de 2 branches parallèles (règle 2 de parcours)

2. Chaines de Markov et graphes probabilistes



(c) Suppression de boucles et absorption de nœuds



(c bis) Suppression de boucles et absorption de nœuds

Pour démontrer (c) par exemple, nous pouvons utiliser :

1. la seconde règle de parcours :

$$p_{12} = b + ab + a^2 b + \cdots = \frac{b}{1-a}$$

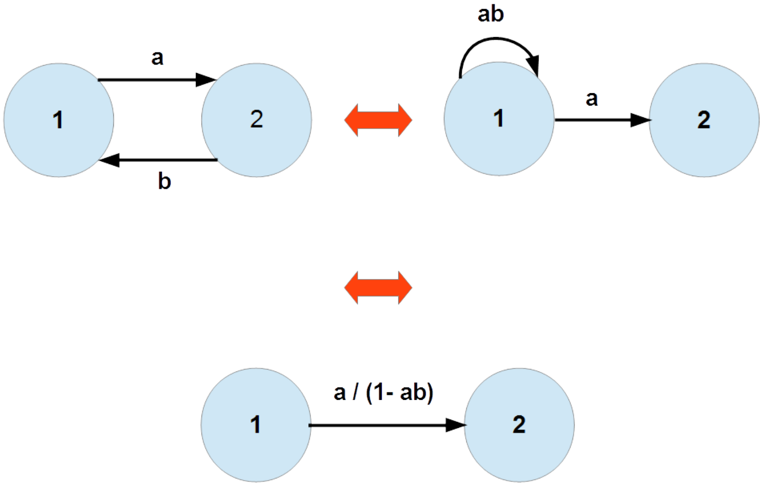
2. la première règle de la valeur moyenne :

$$p_{12} = b + ap_{12}$$

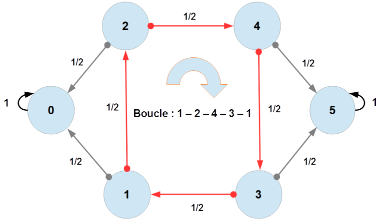
D'où :

$$p_{12} = \frac{b}{1-a}$$

Une dernière petite réduction ...

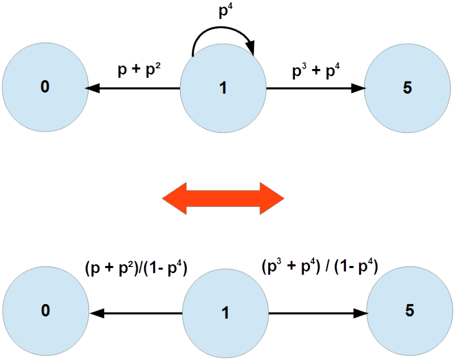


Appliquons ces précieux outils précieux de réduction au graphe de Dédé et Tony en posant $p = 1/2$ et en partant de l'état 1 qui est fondamental.



Regroupons les branches $1 \to 0$ et $1 \to 2 \to 0$ de probabilités respectives p et p^2 qui mènent à l'état absorbant 0 ; les branches $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5$ et $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5$ de probabilités respectives p^3 et p^4 qui mènent à l'état absorbant 5, sans oublier la seule boucle du graphe $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1$, de probabilité p^4.

Nous obtenons les graphes équivalents suivants :



On en déduit $P(\text{Gain}) = \frac{p^3+p^4}{1-p^4} = 0,2$. Pas de surprise !

3. Chaines de Markov et matrices

Nous pouvons également visualiser notre chaine de Markov à l'aide d'une matrice si le nombre d'états est fini.

Définitions

Définition : Soit une chaîne de Markov à N états. On appelle matrice de transition de cette chaine la matrice $\mathcal{P} = (p_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ des probabilités de transition entre deux états du graphe probabiliste associé.

Définition : On appelle matrice stochastique une matrice carrée dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et dont la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Remarque :
La matrice de transition d'un graphe probabiliste est une matrice stochastique.

3. Chaines de Markov et matrices

Remarquons que la numérotation des différents états influe sur la forme de la matrice. On regroupe habituellement les états qui constituent le bord (si ce dernier est non vide).

Nous allons maintenant établir un résultat très utile concernant les chaines de Markov homogènes. Cette propriété, appelée **relation de Chapman-Komolgorov**, permet de relier les probabilités de transition en n étapes aux probabilités de transition en une étape.

- On notera $\mathcal{P} = (p_{i,j})_{i,j \in S^2}$ la matrice de transition de la chaine de Markov.
- Pour $n \geq 0$ et $(i,j) \in S^2$, on note $p_{i,j}^{(n)}$ la probabilité, partant de l'état i à l'instant 0 d'être dans l'état j à l'instant n i.e $\boxed{p_{i,j}^{(n)} = P_{X_0=i}(X_n = j)}$.
- On pose également $\mathcal{P}^{(n)} := (p_{i,j}^{(n)})_{(i,j) \in S^2}$.

Théorème : Pour tout entier $n \geq 0$, la matrice de transition en n étapes est égale à la puissance n-ième de la matrice de transition en une étape :

$$\boxed{\mathcal{P}^{(n)} = (\mathcal{P})^n}$$

Corollaire 1 : Pour tout entier $n \geq 0$, la matrice $\mathcal{P}^{(n)}$ est stochastique.

Corollaire 2 : Pour tout $(i, j) \in S^2$ et tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ on a :

$$p_{i,j}^{(m+n)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(m)} p_{k,j}^{(n)}$$

Citons maintenant un corollaire d'une utilité capitale :

Corollaire 3 : Notons $\vec{p}_0$ l'état initial du système et $\vec{p}_n$ son état après n transitions. Alors (si $\vec{p}_0$ est une matrice ligne):

$$\boxed{\vec{p}_n = \vec{p}_0(\mathcal{P})^n}$$

Un exemple tiré du concours C 2017

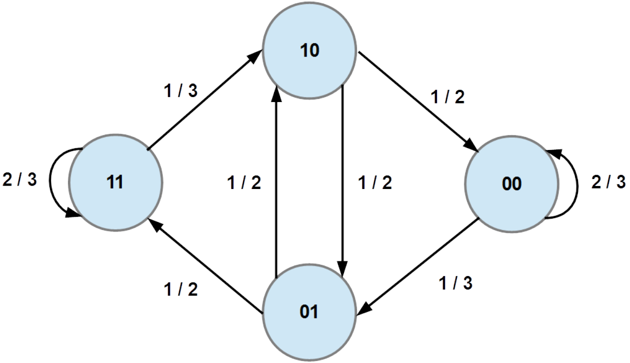
Un étudiant en informatique a créé un programme générant une suite de nombres exclusivement composée de 0 et de 1 selon les conditions :

- les deux premiers nombres sont égaux à 1,
- si deux nombres consécutifs sont égaux à 1, alors le nombre suivant est égal à 1 avec une probabilité de $\frac{2}{3}$,
- si deux nombres consécutifs sont égaux à 0, alors le nombre suivant est égal à 0 avec une probabilité de $\frac{2}{3}$,
- si deux nombres consécutifs sont distincts, alors le nombre suivant est égal à 0 ou 1 avec équiprobabilité.

On note X_n la variable aléatoire égale au n-ième nombre généré par le programme.
Donner la loi de X_n pour $n \geq 3$ ainsi que l'espérance de X_n.

3. Chaines de Markov et matrices

Puisque les deux derniers chiffres obtenus déterminent entièrement le suivant avec les conditions citées, nous sommes amenés à définir naturellement quatre états : 11, 10, 01, 00. Les probabilités de transition sont données par l'énoncé. D'où le graphe probabiliste suivant :



Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On a $X_n(\Omega) = \{0; 1\}$. L'état initial s'écrit 11 ; ainsi il faut $n-2$ transitions pour connaître le n-ième nombre généré par le programme.

Numérotons les états 1, 2, 3, 4 pour 11, 10, 01 et 00, de sorte que la matrice de transition s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3. Chaines de Markov et matrices

Notons $\vec{p}_n = (p_n^1, p_n^2, p_n^3, p_n^4)$ la probabilité d'atteindre chacun des états 1, 2, 3 et 4 au bout de n transitions. Par hypothèse $\vec{p}_0 = (1, 0, 0, 0)$. On a la relation de récurrence $\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n A$.

Une récurrence facile ou l'utilisation du corollaire 3 nous amène à $\vec{p}_n = \vec{p}_0 A^n$. Or $\vec{p}_0 = e_1^T$, où e_1 désigne le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On en déduit que $\vec{p}_n$ n'est rien d'autre que la première ligne de A^n. XCas donne :

$$\begin{cases} A^n_{1,1} = \dfrac{-\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 3}{10} \\ A^n_{1,2} = \dfrac{-2\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2}{10} \\ A^n_{1,3} = \dfrac{2\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 2}{10} \\ A^n_{1,4} = \dfrac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{6}\right)^n + 3}{10} \end{cases}$$

3. Chaines de Markov et matrices

Remarquons que $P(X_n = 0) = p^2_{n-2} + p^4_{n-2}$ et $P(X_n = 1) = p^1_{n-2} + p^3_{n-2}$.

On en déduit la loi de probabilité de X_n :

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{10}\left[-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 5\right]$$

et

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{10}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 5\right]$$

Nous en déduisons que

$$E(X_n) = P(X_n = 1) = \frac{1}{10}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 5\right]$$

4. Un tournoi à trois

Un tournoi équitable ?

Trois personnes jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée de la façon suivante :

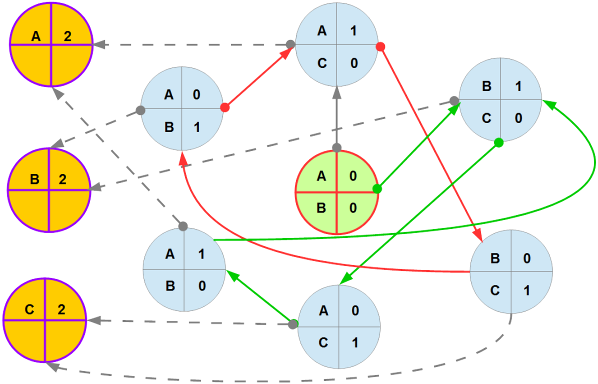
1. **A et B jouent en premier**.
2. Si A gagne, il rencontre C ; auquel cas s'il gagne à nouveau la seconde partie, il est déclaré vainqueur du tournoi. Sinon C rencontre B . . .
3. Si B gagne, il rencontre C ; auquel cas s'il gagne à nouveau la seconde partie, il est déclaré vainqueur du tournoi. Sinon C rencontre A . . .

Bref, à chaque fois, le gagnant d'une partie rencontre le perdant de la partie précédente, et il faut gagner deux parties consécutives pour gagner le tournoi.

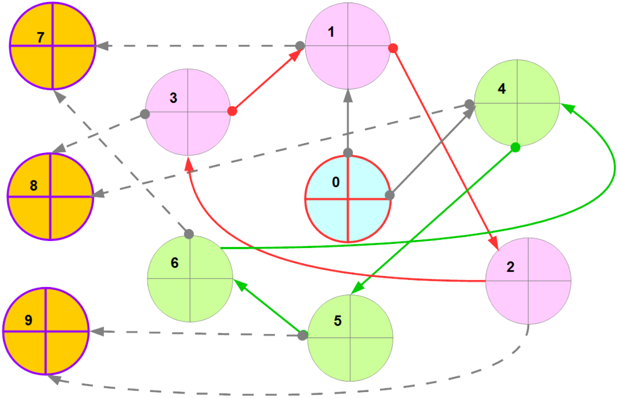
On s'intéresse à la probabilité de gain de chacun des joueurs.

4. Un tournoi à trois

Nous allons définir grâce aux règles du tournoi différents états en indiquant à côté de chaque joueur le nombre de parties gagnées. Ceci nous permet de construire le graphe probabiliste suivant (le poids de chaque branche étant de 1/2) :



Nous pouvons renuméroter les états comme dans le graphe qui suit :



4. Un tournoi à trois

Afin de déterminer la probabilité de gain du joueur A, nous pouvons raisonner comme dans le tout premier exemple. Nous obtenons :

Chemins gagnants :

1. C_1^n : $0 \to 1 \to$ n boucles rouges : $(1 \to 2 \to 3 \to 1) \to 7$
2. C_2^n : $0 \to 4 \to 5 \to 6 \to$ n boucles vertes : $(6 \to 4 \to 5 \to 6) \to 7$

Ainsi, $P(\text{A gagne}) = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (p^3)^n + p^4 \sum_{n=0}^{+\infty} (p^3)^n$ soit :

$$P(\text{A gagne}) = (p^2 + p^4) \sum_{n=0}^{+\infty} (p^3)^n = \frac{p^2 + p^4}{1 - p^3} = \frac{5/16}{7/8} = \frac{5}{14}$$

De même $P(\text{B gagne}) = \dfrac{5}{14}$. On en déduit que $P(\text{C gagne}) = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$.

Le fait de commencer avantage les joueurs A et B.

Un petit défi

On étudie la première rencontre entre deux scarabées situés symétriquement sur un polygone à 2^p ($p \geqslant 2$) côtés. Le jeu se déroule ainsi :

- À l'instant initial, deux scarabées sont situés symétriquement par rapport à O, centre d'un polygone régulier à 2^p côtés.
- Chaque seconde on lance une pièce pour chacun des scarabées. Si la pièce tombe sur pile le scarabée concerné tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, sinon il tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Sauriez-vous déterminer le temps moyen de première rencontre entre nos deux scarabées ? Et pour les plus valeureux, la distribution de probabilité de ce premier temps de rencontre ?

6. Conclusion

Nous n'avons pu effleurer dans ce court exposé que peu de choses. Mais néanmoins, des méthodes ont été mises en place, que ce soit avec les graphes ou matriciellement.
Et il y a déjà beaucoup de belles mathématiques que l'on peut faire avec !

MERCI DE VOTRE ATTENTION