Modélisation mathématique : épisode 2

Tout ce que vous n'avez jamais voulu savoir sans jamais oser le demander !

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

May 13, 2024


Bienvenue sur les
sentiers
mathématiques !

Sommaire

1. Introduction

Conducteurs ou passagers, les trajets en voiture sont toute une aventure : enchainement de voies rapides, de ralentissements lors des traversées de village, feux, dos d'âne, rond-points et parfois les fameux bouchons !

Ce petit exposé se propose de modéliser le trafic routier dans des cas très simples : on y résoudra même des équations du second degré !
Mais avec l'idée que les mathématiques peuvent apporter des réponses à des problèmes très concrets comme celui du trafic routier !

1. Introduction

2. Un modèle simple de trafic routier

La présente partie est largement inspirée de l'excellent livre de Gilles Pagès et Claude Bouzitat : "En passant par hasard... (éditions Vuibert)".

La présente partie est largement inspirée de l'excellent livre de Gilles Pagès et Claude Bouzitat : "En passant par hasard... (éditions Vuibert)".

Duncan Mac Leod, sa femme Tessa et leurs deux enfants Jenny et Angus, patientaient depuis deux heures sous le soleil estival assommant des routes nationales de la vallée du Rhone.

2. Un modèle simple de trafic routier

La présente partie est largement inspirée de l'excellent livre de Gilles Pagès et Claude Bouzitat : "En passant par hasard... (éditions Vuibert)".

Duncan Mac Leod, sa femme Tessa et leurs deux enfants Jenny et Angus, patientaient depuis deux heures sous le soleil estival assommant des routes nationales de la vallée du Rhone.

- Ca commence à bien faire ! grommela Duncan. Nous n'avons pas l'éternité pour rallier notre petit paradis provençal !

2. Un modèle simple de trafic routier

La présente partie est largement inspirée de l'excellent livre de Gilles Pagès et Claude Bouzitat : "En passant par hasard... (éditions Vuibert)".

Duncan Mac Leod, sa femme Tessa et leurs deux enfants Jenny et Angus, patientaient depuis deux heures sous le soleil estival assommant des routes nationales de la vallée du Rhone.

- Ca commence à bien faire ! grommela Duncan. Nous n'avons pas l'éternité pour rallier notre petit paradis provençal !

- Dans "*Retour vers le futur*", au moins ils ont des voitures volantes, gloussa Jenny du haut de ses 18 ans.

2. Un modèle simple de trafic routier

- Très drôle... répliqua le père. Et selon toi, comment faudrait-il s'y prendre pour éviter ce genre de désagréments ? Si tout le monde était discipliné et roulait par exemple à 80 km/h minimum tout au long du trajet, ça irait mieux !

- Très drôle... répliqua le père. Et selon toi, comment faudrait-il s'y prendre pour éviter ce genre de désagréments ? Si tout le monde était discipliné et roulait par exemple à 80 km/h minimum tout au long du trajet, ça irait mieux !

- Si je te suis bien papa, tout le monde doit rouler uniformément, sans chercher à doubler les autres, comme les fourmis. En gros, il s'agit d'avoir un **débit stabilisé** de véhicules.

- Très drôle... répliqua le père. Et selon toi, comment faudrait-il s'y prendre pour éviter ce genre de désagréments ? Si tout le monde était discipliné et roulait par exemple à 80 km/h minimum tout au long du trajet, ça irait mieux !

- Si je te suis bien papa, tout le monde doit rouler uniformément, sans chercher à doubler les autres, comme les fourmis. En gros, il s'agit d'avoir un **débit stabilisé** de véhicules.

- Qu'est-ce donc cela ce débit stabilisé ? demanda Duncan dont l'expérience de conducteur n'était plus à prouver.

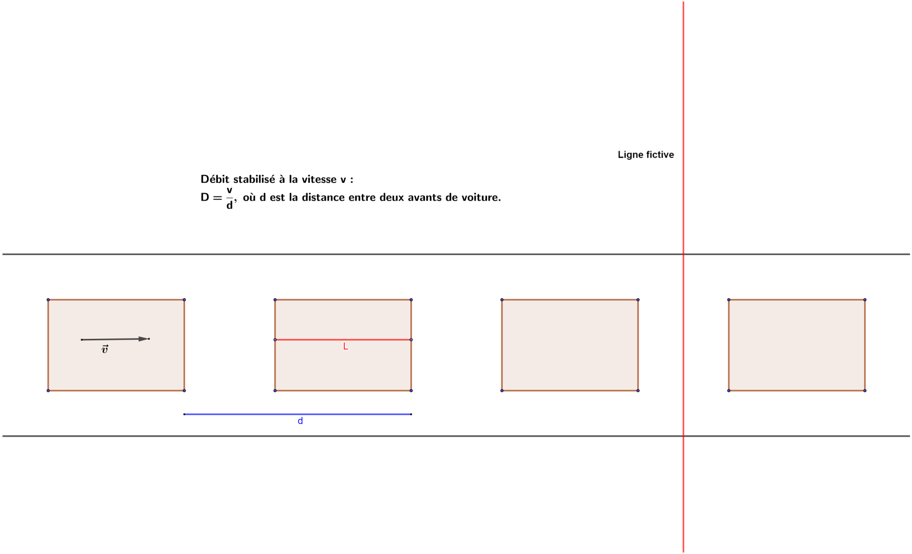
- Très drôle... répliqua le père. Et selon toi, comment faudrait-il s'y prendre pour éviter ce genre de désagréments ? Si tout le monde était discipliné et roulait par exemple à 80 km/h minimum tout au long du trajet, ça irait mieux !

- Si je te suis bien papa, tout le monde doit rouler uniformément, sans chercher à doubler les autres, comme les fourmis. En gros, il s'agit d'avoir un **débit stabilisé** de véhicules.

- Qu'est-ce donc cela ce débit stabilisé ? demanda Duncan dont l'expérience de conducteur n'était plus à prouver.

- Eh bien c'est le nombre de voitures qui franchissent à vitesse constante une ligne imaginaire tracée sur la route, durant une heure de temps.

2. Un modèle simple de trafic routier



Ce **débit stabilisé** est égal à $\boxed{D = \frac{v}{d}}$ où d désigne la distance entre deux avants de voiture dont la longueur moyenne est égale à L.

2. Un modèle simple de trafic routier

Ce **débit stabilisé** est égal à $\boxed{D = \frac{v}{d}}$ où d désigne la distance entre deux avants de voiture dont la longueur moyenne est égale à L.

- Bien répondit Duncan. Donc D a pour unité l'inverse d'une unité de temps : une fréquence ! Ca se tient ton histoire.

2. Un modèle simple de trafic routier

Ce **débit stabilisé** est égal à $\boxed{D = \frac{v}{d}}$ où d désigne la distance entre deux avants de voiture dont la longueur moyenne est égale à L.

- Bien répondit Duncan. Donc D a pour unité l'inverse d'une unité de temps : une fréquence ! Ca se tient ton histoire.

- Si tu veux on commence par visualiser d : tu as un peu tendance à ne pas respecter les distances de sécurité papa !

2. Un modèle simple de trafic routier

Ce **débit stabilisé** est égal à $\boxed{D = \frac{v}{d}}$ où d désigne la distance entre deux avants de voiture dont la longueur moyenne est égale à L.

- Bien répondit Duncan. Donc D a pour unité l'inverse d'une unité de temps : une fréquence ! Ca se tient ton histoire.

- Si tu veux on commence par visualiser d : tu as un peu tendance à ne pas respecter les distances de sécurité papa !

- Mais si, répliqua Duncan. Pour le commun des mortels, il faut environ 1 seconde de temps de réaction en cas de freinage brutal du véhicule de devant. Mais pour moi, 1/10 ème de seconde suffit !

2. Un modèle simple de trafic routier

Ce **débit stabilisé** est égal à $\boxed{D = \frac{v}{d}}$ où d désigne la distance entre deux avants de voiture dont la longueur moyenne est égale à L.

- Bien répondit Duncan. Donc D a pour unité l'inverse d'une unité de temps : une fréquence ! Ca se tient ton histoire.

- Si tu veux on commence par visualiser d : tu as un peu tendance à ne pas respecter les distances de sécurité papa !

- Mais si, répliqua Duncan. Pour le commun des mortels, il faut environ 1 seconde de temps de réaction en cas de freinage brutal du véhicule de devant. Mais pour moi, 1/10 ème de seconde suffit !

Jenny pouffa de rire.

- Et l'énergie cinétique ? Ca ne freine pas comme ça une voiture en dehors de ton temps de réaction ! C'est $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ où m est la masse de ta voiture.

- Ok ! répondit Duncan en se grattant la tête. Donc si l'abruti de devant pile brusquement, avec mon temps de réaction de t_0 secondes et ma vitesse v (en m/s), j'ai parcouru la distance de $t_0 \times v$ mètres.

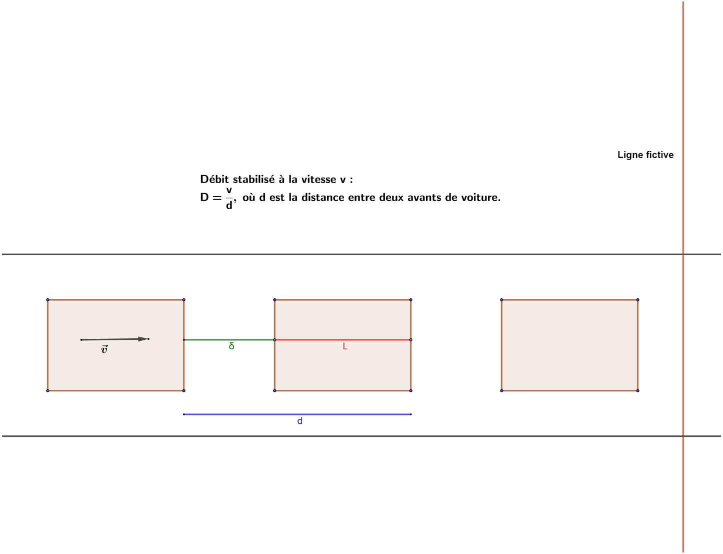
Si je note δ la distance qui me sépare de son pare-choc arrière, il me faut également rajouter la distance nécessaire à mes freins pour dissiper l'énergie cinétique de ma voiture qui est de la forme $C \times v^2$ si mes souvenirs sont bons !

Donc de pare-choc avant à pare-choc avant : $d = \delta + L$

2. Un modèle simple de trafic routier

Débit stabilisé à la vitesse v :

$D = \frac{v}{d}$, où d est la distance entre deux avants de voiture.



2. Un modèle simple de trafic routier

- Bref, $d = t_0 v + Cv^2 + L$ triompha Duncan.

- Bref, $d = t_0 v + Cv^2 + L$ triompha Duncan.

- Bravo Papa, tes neurones n'ont pas trop vieilli !

- Bref, $d = t_0 v + Cv^2 + L$ triompha Duncan.

- Bravo Papa, tes neurones n'ont pas trop vieilli !

- Je serai éternellement jeune, sourit Duncan. Bon nous avons donc $D = \dfrac{v}{Cv^2 + t_0 v + L}$, ce qui équivaut à $D(Cv^2 + t_0 v + L) = v$, soit :

$$(1) \;:\; \boxed{DCv^2 + (Dt_0 - 1)v + DL = 0}$$

avec des coefficients C, D, L, t_0 tous positifs.

2. Un modèle simple de trafic routier

(1) équivaut à : $\boxed{v^2 - \left(\dfrac{1 - Dt_0}{DC}\right) v + \dfrac{L}{C} = 0}$.

Nous reconnaissons une équation du second degré en v de la forme $X^2 - SX + P = 0$, où S désigne la somme des racines (éventuellement complexes) et P leur produit.

(1) équivaut à : $\boxed{v^2 - \left(\frac{1 - Dt_0}{DC}\right) v + \frac{L}{C} = 0}$.

Nous reconnaissons une équation du second degré en v de la forme $X^2 - SX + P = 0$, où S désigne la somme des racines (éventuellement complexes) et P leur produit.

Comme $P = \frac{L}{C} > 0$, les racines éventuelles du trinôme sont de même signe, et comme $v \geq 0$, ces racines sont toutes les deux positives. On en déduit que $S \geq 0$ et donc, puisque $DC > 0$, que $\underline{1 - Dt_0 \geq 0}$.

Résolvons (1) :

$$\Delta = \frac{(-(1 - Dt_0))^2 - 4D^2LC}{(DC)^2} = \frac{(1 - Dt_0)^2 - (2D\sqrt{LC})^2}{(DC)^2}.$$

(1) possède au moins une solution réelle si et seulement si $\Delta \geq 0$.

C'est-à-dire si $\underline{(1 - Dt_0)^2 \geq (2D\sqrt{LC})^2}$ $(*)$

Résolvons (1) :

$$\Delta = \frac{(-(1-Dt_0))^2 - 4D^2LC}{(DC)^2} = \frac{(1-Dt_0)^2 - (2D\sqrt{LC})^2}{(DC)^2}.$$

(1) possède au moins une solution réelle si et seulement si $\Delta \geq 0$.

C'est-à-dire si $\underline{(1-Dt_0)^2 \geq (2D\sqrt{LC})^2}$ $(*)$

- Horreur ! s'exclama Duncan. Une inéquation du second degré en L cette fois-ci. Du second degré dans le second degré, ça commence à faire beaucoup.

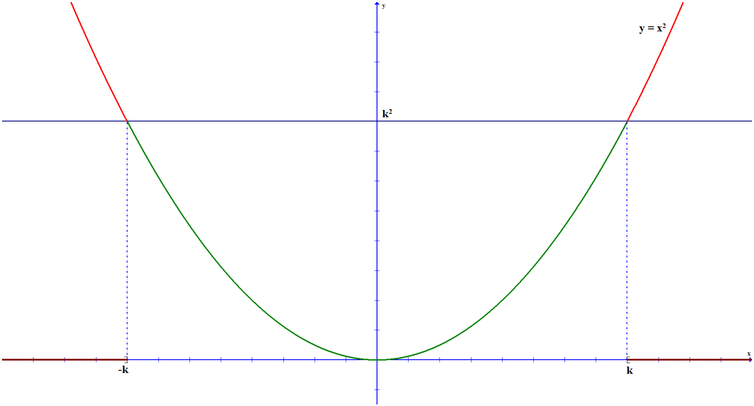
- Pas de panique, répliqua Jenny dont les cours de première étaient encore tout frais dans sa mémoire. Celle-ci est simple ...

2. Un modèle simple de trafic routier

En effet, notre inéquation $(Dt_0 - 1)^2 \geq (2D\sqrt{LC})^2 \quad (*)$ est de la forme $X^2 \geq k^2$.

Et chacun sait que (pour $k \geq 0$) :

$$X^2 \geq k^2 \iff (X \geq k) \text{ ou } (X \leq -k)$$



Un modèle simple de trafic routier

Appliquant ceci à notre inéquation (*) nous obtenons :

$$1 - Dt_0 \geq 2D\sqrt{LC} \quad \text{ou} \quad 1 - Dt_0 \leq -2D\sqrt{LC}$$

Un modèle simple de trafic routier

Appliquant ceci à notre inéquation (*) nous obtenons :

$$1 - Dt_0 \geq 2D\sqrt{LC} \text{ ou } 1 - Dt_0 \leq -2D\sqrt{LC}$$

La seconde inéquation n'a pas de solution car $1 - Dt_0 \geq 0$ et $-2D\sqrt{LC} < 0$.

Un modèle simple de trafic routier

Appliquant ceci à notre inéquation (*) nous obtenons :

$$1 - Dt_0 \geq 2D\sqrt{LC} \quad \text{ou} \quad 1 - Dt_0 \leq -2D\sqrt{LC}$$

La seconde inéquation n'a pas de solution car $1 - Dt_0 \geq 0$ et $-2D\sqrt{LC} < 0$.

Nous en déduisons que : $\boxed{D \leq \dfrac{1}{t_0 + 2\sqrt{LC}}}$.

2. Un modèle simple de trafic routier

Revenons à nos moutons ...

Sous la condition $\boxed{D \leq \dfrac{1}{t_0 + 2\sqrt{LC}}}$ l'équation :

$$v^2 - \left(\frac{1 - Dt_0}{DC}\right) v + \frac{L}{C} = 0$$

possède deux solutions réelles positives :

$$\begin{cases} v_{min} = \dfrac{1 - Dt_0 - \sqrt{(1 - Dt_0)^2 - 4D^2LC}}{2DC} \\[2ex] v_{max} = \dfrac{1 - Dt_0 + \sqrt{(1 - Dt_0)^2 - 4D^2LC}}{2DC} \end{cases}$$

2. Un modèle simple de trafic routier

Jenny eut un sourire.

- Mais nous avons un débit D maximal lorsque $\Delta = 0$!

Auquel cas, $D_{max} = \dfrac{1}{t_0 + 2\sqrt{LC}}$.

Jenny eut un sourire.

- Mais nous avons un débit D maximal lorsque $\Delta = 0$!
Auquel cas, $D_{max} = \dfrac{1}{t_0 + 2\sqrt{LC}}$.

- Ce qui correspond à une vitesse de $v_{max} = \dfrac{1 - D_{max} t_0}{2 D_{max} C} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$.
Mais ce coefficient C, c'est embêtant quand même... De plus, il dépend de chaque véhicule. De même pour L.

2. Un modèle simple de trafic routier

Jenny eut un sourire.

- Mais nous avons un débit D maximal lorsque $\Delta = 0$!

Auquel cas, $D_{max} = \dfrac{1}{t_0 + 2\sqrt{LC}}$.

- Ce qui correspond à une vitesse de $v_{max} = \dfrac{1 - D_{max} t_0}{2 D_{max} C} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

Mais ce coefficient C, c'est embêtant quand même... De plus, il dépend de chaque véhicule. De même pour L.

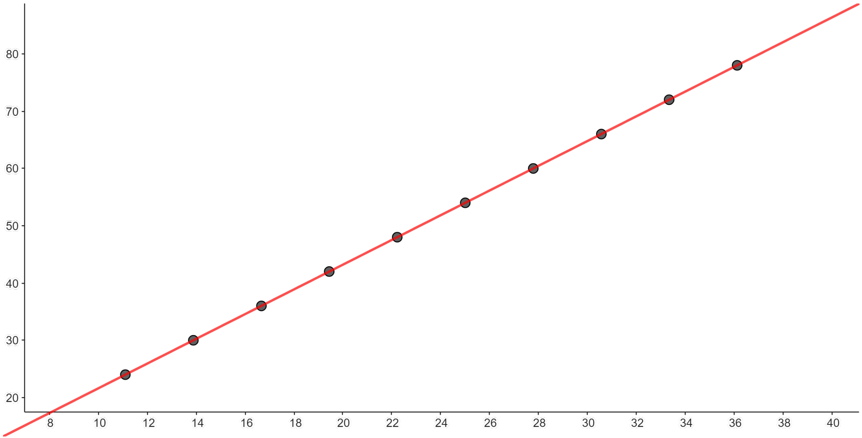
- Heureusement, les as de la *sécurité routière* ont évalué tout ça en moyenne. Il y a même un tableau donnant la distance de sécurité δ entre deux véhicules en fonction de la vitesse v.

On devrait la noter $\delta(v)$ en fait ...

Voyons voir ça ... Sur Internet, nous trouvons :

- Pour une vitesse v de 40 km/h (11,11 m/s), $\delta(v) = 24$m
- Pour une vitesse v de 50 km/h (13,89 m/s), $\delta(v) = 30$m
- Pour une vitesse v de 60 km/h (16,67 m/s), $\delta(v) = 36$m
- Pour une vitesse v de 70 km/h (19,44 m/s), $\delta(v) = 42$m
- Pour une vitesse v de 80 km/h (22,22 m/s), $\delta(v) = 48$m
- Pour une vitesse v de 90 km/h (25 m/s), $\delta(v) = 54$m
- Pour une vitesse v de 100 km/h (27,78 m/s), $\delta(v) = 60$m
- Pour une vitesse v de 110 km/h (30,56 m/s), $\delta(v) = 66$m
- Pour une vitesse v de 120 km/h (33,33 m/s), $\delta(v) = 72$m
- Pour une vitesse v de 130 km/h (36,11 m/s), $\delta(v) = 78$m

Geogebra nous permet de tracer un nuage de points.



On trouve $\delta(v) = 2,16v$ par une régression linéaire.

2. Un modèle simple de trafic routier

Or $\delta(v) = Cv^2 + t_0 v$. En évaluant le temps de réaction t_0 à 1 seconde, nous obtenons : $Cv^2 = 1,16v$. Soit (pour $v \neq 0$), $Cv = 1,16$.

Or $\delta(v) = Cv^2 + t_0 v$. En évaluant le temps de réaction t_0 à 1 seconde, nous obtenons : $Cv^2 = 1,16v$. Soit (pour $v \neq 0$), $Cv = 1,16$.

Nous obtenons :

v (m/s)	C
11,1	0,1044
13,89	0,0835
16,67	0,0695
19,44	0,0596
22,22	0,0522
25	0,0464
27,78	0,0417
30,56	0,0379
33,33	0,0348
36,11	0,0321

2. Un modèle simple de trafic routier

La longueur moyenne d'une voiture est de 4,23 m.
En calculant une valeur moyenne de C, nous obtenons $C \approx 0,0562$.

Partant de $v_{max} = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$, nous obtenons $v_{max} \approx 8,67 \mathrm{m/s}$,
soit environ 31,2 km/h !!!

2. Un modèle simple de trafic routier

La longueur moyenne d'une voiture est de 4,23 m.
En calculant une valeur moyenne de C, nous obtenons $C \approx 0,0562$.

Partant de $v_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, nous obtenons $v_{max} \approx 8,67 \mathrm{m/s}$,
soit environ 31,2 km/h !!!

Duncan soupira.

2. Un modèle simple de trafic routier

La longueur moyenne d'une voiture est de 4,23 m.
En calculant une valeur moyenne de C, nous obtenons $C \approx 0,0562$.

Partant de $v_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, nous obtenons $v_{max} \approx 8,67 \mathrm{m/s}$,
soit environ 31,2 km/h !!!

Duncan soupira.

- Eh bien à ce rythme là, le voyage va paraitre une éternité !

2. Un modèle simple de trafic routier

La longueur moyenne d'une voiture est de 4,23 m.
En calculant une valeur moyenne de C, nous obtenons $C \approx 0,0562$.

Partant de $v_{max} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, nous obtenons $v_{max} \approx 8,67\text{m/s}$,
soit environ 31,2 km/h !!!

Duncan soupira.

- Eh bien à ce rythme là, le voyage va paraitre une éternité !

Jenny lui dit :

- Oh papa, ça ne devrait pas te poser de problèmes ...

Toute ressemblance avec des personnes réelles ou de fiction serait purement fortuite !

2. Un modèle simple de trafic routier

3. Un modèle plus élaboré

Nous allons dans cette partie approfondir notre étude préliminaire, qui, bien que nécessitant peu d'outils mathématiques, nous permettait déjà d'obtenir des résultats pour le moins surprenants !

Notations

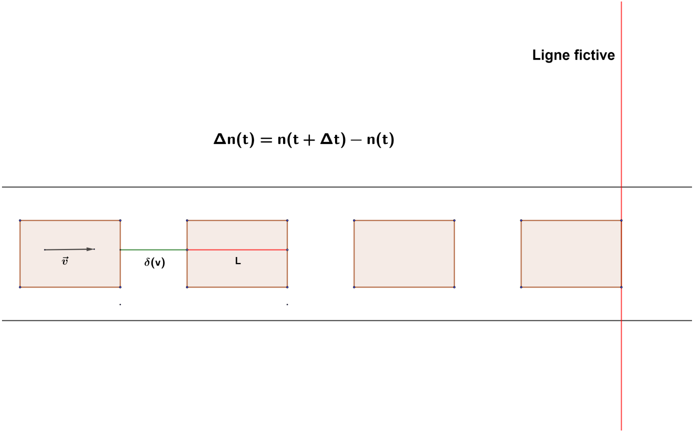
Sur un tronçon de route rectiligne mono-voie à vitesse stabilisée (comme avant), nous noterons :

1. la **concentration** c **de véhicules** (en véhicules / km),
2. le **débit** D **de véhicules** (en véhicules / h),
3. la **vitesse** v **du flux** (en km / h)

Mais le plus souvent, il est substitué à la concentration c le **taux d'occupation** τ **de la chaussée** défini par : $\boxed{\tau = Lc}$, où L désigne la longueur moyenne des véhicules constituant le flux de circulation.

3. Un modèle plus élaboré

Comme précédemment, on considère une ligne fictive orthogonale au tronçon de route rectiligne et on note $\Delta n(t)$ le nombre (moyen) de véhicules franchissant cette ligne fictive entre les instants t et $t + \Delta t$. Dans la pratique, $\Delta t \approx 20$ secondes.



Analyse de ce qui s'est passé entre t et $t + \Delta t$

Considérons une voiture qui franchit la ligne fictive à l'instant $t + \Delta t$.

1. Cette voiture a parcouru la distance $v\Delta t$,
2. Du fait de la longueur L de chaque véhicule et de la distance de sécurité $\delta(v)$ entre chaque véhicule, on a :

$$v\Delta t = \Delta n(t) \times (L + \delta(v))$$

Nous obtenons donc $\dfrac{\Delta n(t)}{\Delta t} = \dfrac{v}{L + \delta(v)}$.

Faisant tendre Δt vers 0, il vient :

$$n'(t) = \frac{v}{L + \delta(v)}$$

3. Un modèle plus élaboré

Le **débit** D de véhicules est par définition la variation instantanée du nombre de véhicules franchissant la ligne fictive, i.e $n'(t)$. D'où :

$$\boxed{D = \frac{v}{L+\delta(v)} \quad (1)}$$

On en déduit la relation entre le taux d'occupation de la chaussée - qui est par définition égal à $\tau = \dfrac{L}{L+\delta(v)}$ - et le débit D :

$$\boxed{\tau = \frac{L}{v} D}$$

En terme de concentration, puisque $\tau = Lc$:

$$\boxed{c = \frac{D}{v}}$$

Appelons v_{max} la vitesse maximale autorisée sur le tronçon considéré.

Nous avons vu dans la première partie de notre exposé que l'on pouvait considérer $\delta(v)$ de la forme $\delta(v) = Cv^2 + t_0 v$, où t_0 est le temps de réaction du conducteur si la voiture de devant freine et Cv^2 représente la distance nécessaire pour dissiper l'énergie cinétique de la voiture une fois, le temps de réaction passé.

Ainsi, le débit est égal à $D(v) = \dfrac{v}{L + Cv^2 + t_0 v}$.

En vertu de (1) :

Pour tout réel $v \in [0; v_{max}]$, $D'(v) = \dfrac{L + \delta(v) - v\delta'(v)}{(L + \delta(v))^2}$.

soit : $D'(v) = \dfrac{L - Cv^2}{(L + t_0 v + Cv^2)^2}$.

3. Un modèle plus élaboré

Nous en déduisons immédiatement que D' s'annule une unique fois sur $[0; v_{max}]$ en $v^* = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$.

D'autre part, D' est du signe de $L - Cv^2$, donc :

v	0		v^*		v_{max}
$D'(v)$		$+$	0	$-$	
$D(v)$			D^*		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$D(v_{max})$

où $D^* = D(v^*) = \dfrac{1}{t_0 + 2\sqrt{LC}}$.

3. Un modèle plus élaboré

Le taux d'occupation de la route τ^* associé est alors de :

$$\tau^* = \frac{1}{2 + \frac{t_0}{\sqrt{LC}}}$$

3. Un modèle plus élaboré

Le taux d'occupation de la route τ^* associé est alors de :

$$\tau^* = \frac{1}{2 + \frac{t_0}{\sqrt{LC}}}$$

Reprenons les valeurs déterminées à la première partie de notre exposé : $t_0 = 1$ seconde, $C \approx 0,0562$, $L = 4,23$ mètres et $v^* = 8,67\ m/s$.

Nous trouvons en ayant converti t_0 en heures, C en h^2/km et v^* en km/h :

1. $D^* \approx 1822$ véhicules par heure.
2. $\tau^* \approx 24,7\%$

3. Un modèle plus élaboré

Le diagramme fondamental associé est la courbe donnant le débit D en fonction du taux d'occupation τ de la chaussée.

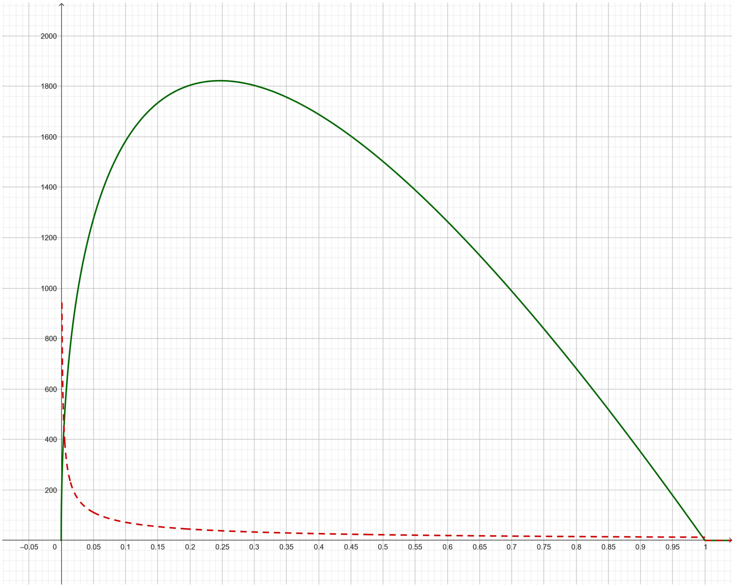
Nous laissons votre talent calculatoire aboutir au fait que :

$$\boxed{D = \frac{-t_0\tau + \sqrt{\tau^2 t_0^2 + 4LC\tau(1-\tau)}}{2LC}}$$

Nous en déduisons également la vitesse en fonction du taux d'occupation :

$$\boxed{v = \frac{L}{\tau}D = \frac{-t_0 + \sqrt{\tau^2 t_0^2 + 4LC(1-\tau)/\tau}}{2C}}$$

3. Un modèle plus élaboré



4. Poussons le bouchon un peu plus loin ...

L'étude précédente peut être affinée en détaillant le processus de création d'un bouchon, la propagation d'un ralentissement.

Nous conseillons l'excellente vidéo de Laurent Dumas à l'adresse suivante : `https://www.youtube.com/watch?v=Z7QFNSfL5fY`

MERCI DE VOTRE ATTENTION