

# Modélisation mathématique : épisode 1

Tout ce que vous n'avez jamais voulu savoir sans jamais oser le demander !

Yannick Le Bastard

LEGTA de l'Hérault

March 31, 2024



Bienvenue sur les  
sentiers  
mathématiques !

# Sommaire

- ➊ Qu'est-ce que la modélisation ?
- ➋ Un premier exemple
- ➌ Décroissance radioactive
- ➍ Vers un modèle de réflexion
- ➎ Épidémiologie : modèles SIS et SIR

# 1. Qu'est-ce que la modélisation ?

Modéliser, c'est **comprendre** et **prévoir**.

# 1. Qu'est-ce que la modélisation ?

Modéliser, c'est **comprendre** et **prévoir**.

Modéliser, c'est décrire le réel (en le simplifiant) et le **transcrire mathématiquement**.

# 1. Qu'est-ce que la modélisation ?

Modéliser, c'est **comprendre** et **prévoir**.

Modéliser, c'est décrire le réel (en le simplifiant) et le **transcrire mathématiquement**.

Modéliser, c'est accepter de confronter son modèle à la réalité, quitte à en changer.

# 1. Qu'est-ce que la modélisation ?

Nous faisons tous des modélisations complexes sans le savoir !

- ① Estimer le temps d'attente à une caisse de supermarché
- ② Jauger du prix d'un objet dans une brocante
- ③ Estimer le temps d'un trajet en fonction de la circulation
- ④ Estimer sa note à la sortie du DS de maths

# 1. Qu'est-ce que la modélisation ?

Mais des situations de la vie courante demandent aussi des modélisations qui peuvent s'avérer délicates :

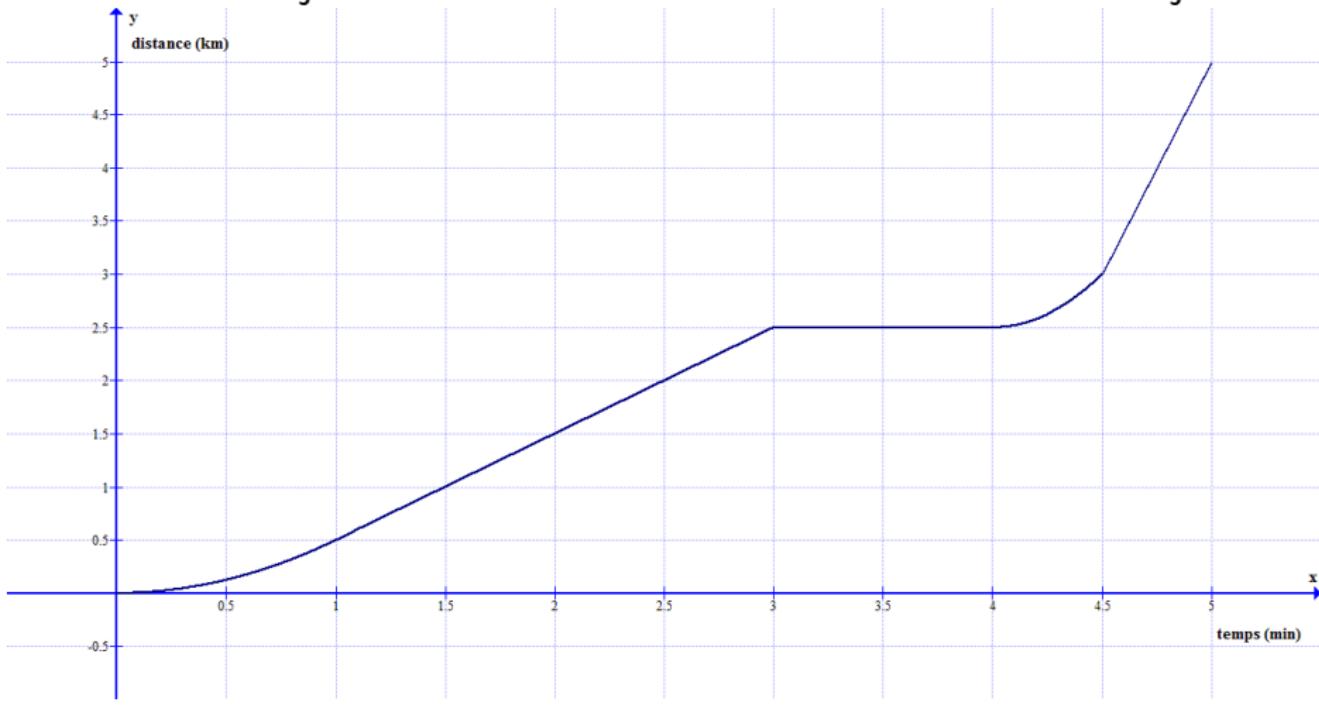
- ➊ Déterminer l'importance et quand sera atteint le pic d'une épidémie
- ➋ Estimer l'augmentation de l'inflation
- ➌ Prévoir la météo des trois prochains jours
- ➍ Prévoir une éruption volcanique
- ➎ Estimer un rendement céréalier

## 2. Un premier exemple

Wayne et ses amis souhaitent se rendre à un concert de rock fort ...

## 2. Un premier exemple

Pour cela, ils partent de chez Wayne jusqu'à la salle de concert située à 5 km selon le trajet donné ci-dessous. Pourriez-vous raconter ce trajet ?

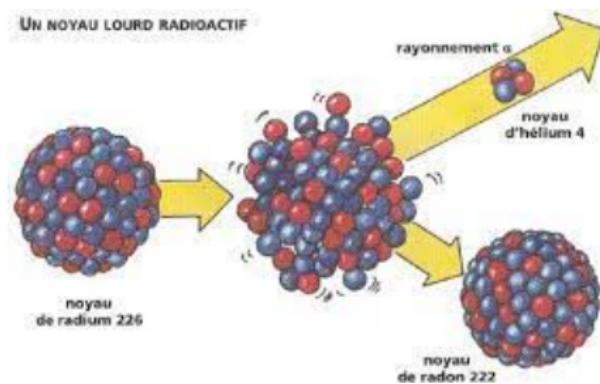


### 3. Décroissance radioactive

En 1896, Henri Becquerel découvre que certaines substances émettent spontanément des rayonnements capables de traverser la matière. Pierre et Marie Curie étudieront notamment un de ces éléments qui prendra le nom de radium.

### 3. Décroissance radioactive

En 1896, Henri Becquerel découvre que certaines substances émettent spontanément des rayonnements capables de traverser la matière. Pierre et Marie Curie étudieront notamment un de ces éléments qui prendra le nom de radium.



### 3. Décroissance radioactive

Un atome radioactif peut émettre trois types de particules associées à un rayonnement électromagnétique :

- ① Particules  $\alpha$  : noyaux d'hélium 4 émis avec une vitesse de 20 000 Km/s, facilement arrêtés avec une feuille de papier.
- ② Particules  $\beta$  : se déclinent en deux sous particules, à savoir :
  - a) Les particules  $\beta^-$ , des électrons émis à une vitesse de 280 000 km/s, arrêtés par une feuille d'aluminium.
  - b) Les particules  $\beta^+$ , des positrons émis à une vitesse de 280 000 km/s, facilement arrêtés (dès qu'ils rencontrent de la matière : il y a annihilation !)
- ③ Rayonnement  $\gamma$  : une onde électromagnétique de  $\lambda = 10^{-4}$ nm. Pour les arrêter il faut quelques mètres de béton.

### 3. Décroissance radioactive

#### Évolution du nombre d'atomes radioactifs ${}^A_Z X$

Notons  $N_0$  le nombre initial d'atomes radioactifs de l'élément  ${}^A_Z X$  et  $N(t)$  le nombre d'atomes radioactifs du même élément à l'instant  $t$ .

Pendant la durée  $\Delta t$ , la variation  $\Delta N(t)$  du nombre d'atomes radioactifs est égale à :

$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$$

**Remarquons que pour tout instant  $t$ ,  $\Delta N(t) < 0$ .**

**L'activité moyenne  $A(t)$**  exprimée en Becquerels (Bq) est le **nombre moyen de désintégrations par unité de temps** :  $A(t) = -\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$ .

### 3. Décroissance radioactive

#### Évolution du nombre d'atomes radioactifs ${}^A_Z X$

La loi de Rutherford et Soddy (1902) nous dit que l'activité moyenne est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant  $t$  :

$A(t) = \lambda N(t)$ , avec  $\lambda$  constante radioactive qui dépend uniquement du nucléide radioactif considéré et s'exprime en  $ut^{-1}$  ( $ut$  est l'unité de temps).

### 3. Décroissance radioactive

#### Évolution du nombre d'atomes radioactifs ${}^A_Z X$

La loi de Rutherford et Soddy (1902) nous dit que l'activité moyenne est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant  $t$  :  $A(t) = \lambda N(t)$ , avec  $\lambda$  constante radioactive qui dépend uniquement du nucléide radioactif considéré et s'exprime en  $ut^{-1}$  ( $ut$  est l'unité de temps).

Ainsi, nous avons :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \quad (*)$$

### 3. Décroissance radioactive

#### Évolution du nombre d'atomes radioactifs ${}^A_Z X$

La loi de Rutherford et Soddy (1902) nous dit que l'activité moyenne est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant  $t$  :  $A(t) = \lambda N(t)$ , avec  $\lambda$  constante radioactive qui dépend uniquement du nucléide radioactif considéré et s'exprime en  $ut^{-1}$  ( $ut$  est l'unité de temps).

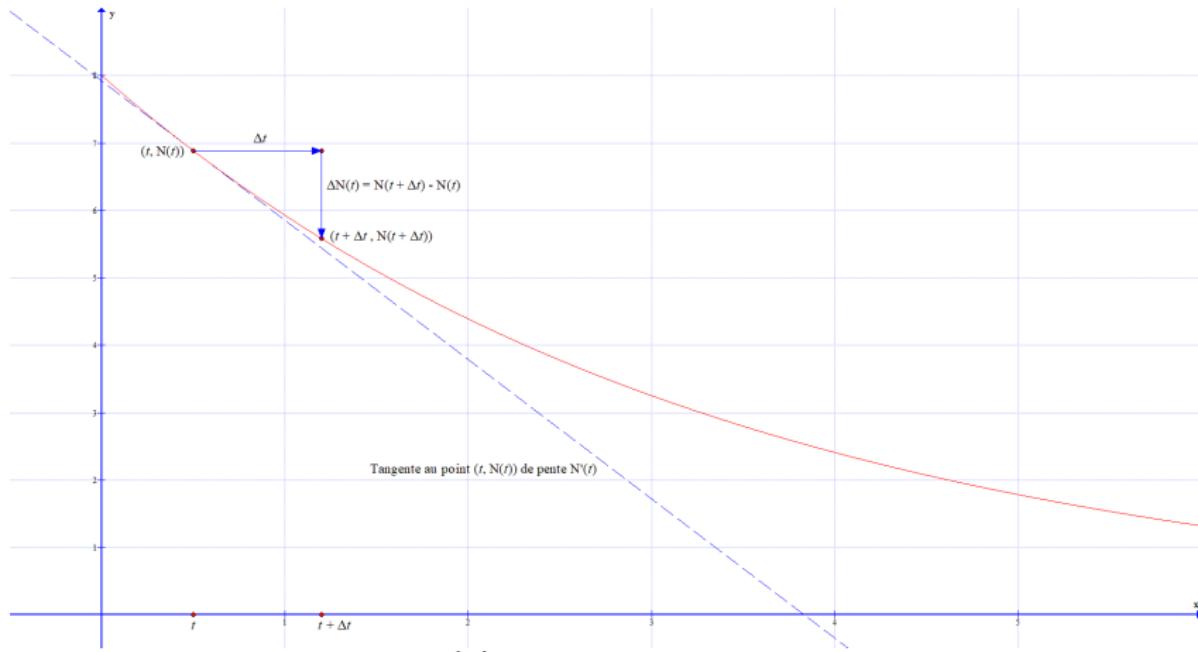
Ainsi, nous avons :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \quad (*)$$

Faisant tendre  $\Delta t$  vers 0 dans (\*), nous obtenons l'équation différentielle :

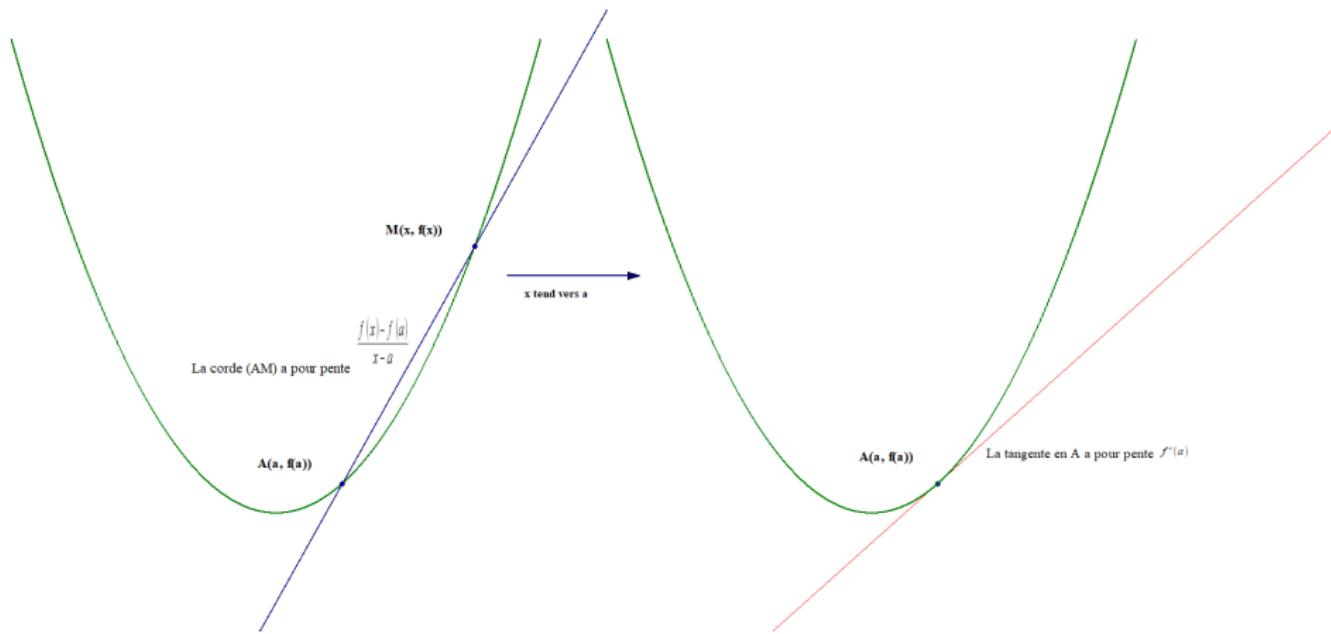
$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

### 3. Décroissance radioactive



La pente de la corde  $\frac{\Delta N(t)}{\Delta t}$  reliant  $(t, N(t))$  et  $(t + \Delta t, N(t + \Delta t))$  tend vers la pente  $N'(t)$  de la tangente en  $(t, N(t))$  quand  $\Delta t$  tend vers 0.

### 3. Décroissance radioactive



Eh oui, c'est la définition du nombre dérivé : la pente d'une tangente mais aussi un taux de variation instantané !

### 3. Décroissance radioactive

Nous notons aussi usuellement :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

#### Résolution de l'EDO obtenue

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme  $y' = ay$  dont les solutions sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{ax}$ .

### 3. Décroissance radioactive

Nous notons aussi usuellement :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t)$$

#### Résolution de l'EDO obtenue

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire d'ordre 1 de la forme  $y' = ay$  dont les solutions sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = Ce^{ax}$ .

Comme  $N(0) = N_0$ , nous obtenons immédiatement que pour tout réel  $t \geq 0$  :

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

### 3. Décroissance radioactive

La détermination de ces paramètres  $\lambda$  fait partie de ce qu'on appelle les **problèmes inverses**, qui sont très délicats. Ils font appel à la théorie de l'estimation et aux statistiques bayésiennes. Nous n'aborderons pas ce point dans notre exposé.

### 3. Décroissance radioactive

La détermination de ces paramètres  $\lambda$  fait partie de ce qu'on appelle les **problèmes inverses**, qui sont très délicats. Ils font appel à la théorie de l'estimation et aux statistiques bayésiennes. Nous n'aborderons pas ce point dans notre exposé.

Voici quelques valeurs de  $\lambda$  exprimées en  $s^{-1}$  ou  $jour^{-1}$  ou  $an^{-1}$  :

- pour l'uranium :  $\lambda = 1,5 \times 10^{-10} \text{ an}^{-1}$
- pour le carbone 14 :  $\lambda = 1,2 \times 10^{-4} \text{ an}^{-1}$
- pour l'iode 131 :  $\lambda = 8,5 \times 10^{-2} \text{ jour}^{-1}$

### 3. Décroissance radioactive

#### Résumé

- ① Nous avons commencé par écrire la variation du nombre d'atomes radioactifs présents entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :  
$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$

### 3. Décroissance radioactive

#### Résumé

- ① Nous avons commencé par écrire la variation du nombre d'atomes radioactifs présents entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :  
$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$
- ② Cette variation est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant  $t$  et à la durée  $\Delta t$  indépendamment de  $t$  :  
$$\Delta N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$$
 pour un certain réel  $\lambda > 0.$

### 3. Décroissance radioactive

#### Résumé

- ① Nous avons commencé par écrire la variation du nombre d'atomes radioactifs présents entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :  
$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$
- ② Cette variation est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant  $t$  et à la durée  $\Delta t$  indépendamment de  $t$  :  
$$\Delta N(t) = -\lambda N(t)\Delta t$$
 pour un certain réel  $\lambda > 0.$
- ③ Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0 (et en admettant  $N$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ ), nous obtenons la variation instantanée du nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant  $t$  :  $N'(t) = -\lambda N(t).$

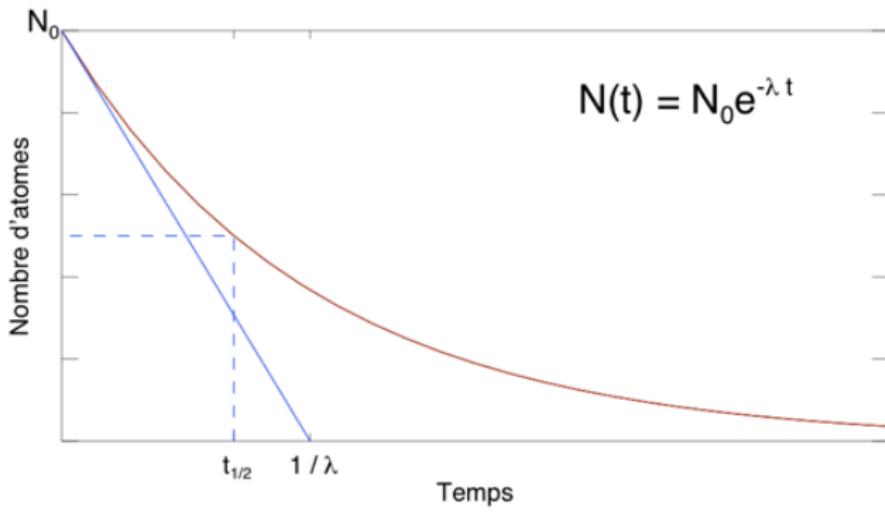
### 3. Décroissance radioactive

Nous appelons **demi-vie** de l'élément radioactif  $Z$  la période de temps  $t_{1/2}$  durant laquelle la moitié des atomes radioactifs se désintègrent. Ceci est indépendant de l'instant initial  $t$  d'observation : il s'agit d'une **loi sans mémoire**.

### 3. Décroissance radioactive

Nous appelons **demi-vie** de l'élément radioactif  $Z$  la période de temps  $t_{1/2}$  durant laquelle la moitié des atomes radioactifs se désintègrent. Ceci est indépendant de l'instant initial  $t$  d'observation : il s'agit d'une **loi sans mémoire**.

La pente de la tangente à  $\mathcal{C}_N$  à  $t = 0$  est exactement  $1/\lambda$ .

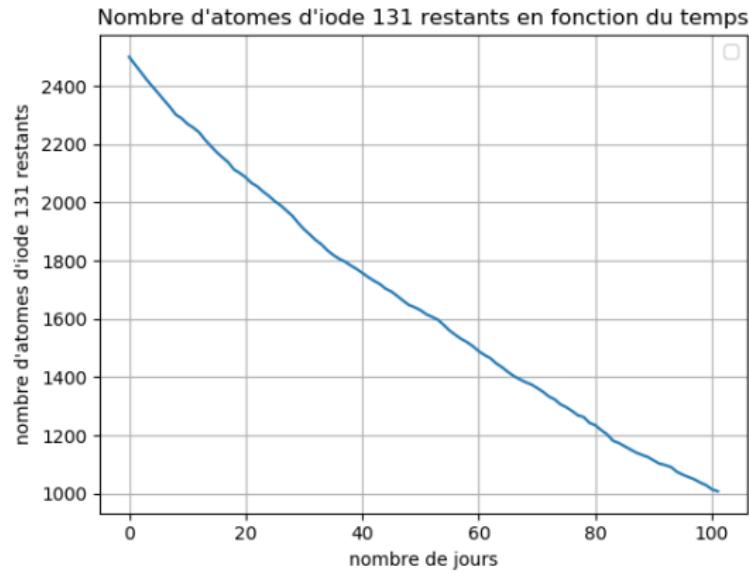


### 3. Décroissance radioactive

Notre but étant juste la modélisation de certains phénomènes, nous nous contenterons de dire que la radioactivité a de nombreuses applications : datation d'objets anciens grâce au carbone 14, détermination de l'origine sédimentaire ou mantellique de granites grâce au couple rubidium / strontium, utilisation d'isotopes radioactifs à faible demi-vie dans le domaine médical, etc.

### 3. Décroissance radioactive

Nous pouvons également utiliser l'approche probabiliste pour modéliser la décroissance radioactive, la constante  $\lambda$  représentant la probabilité de désintégration d'un atome radioactif par unité de temps. Un script Python donne la courbe suivante :



## 4. Vers un modèle de réflexion

De nombreuses autres équations différentielles peuvent être établies de la même manière, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment :

- ① Le modèle de croissance Malthusien en dynamique des populations :  
 $N'(t) = rN(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population.

## 4. Vers un modèle de réflexion

De nombreuses autres équations différentielles peuvent être établies de la même manière, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment :

- ➊ Le modèle de croissance Malthusien en dynamique des populations :  
 $N'(t) = rN(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population.
- ➋ Le modèle de croissance logistique en dynamique des populations :  
 $N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population et  $K$  la capacité d'accueil du milieu.

## 4. Vers un modèle de réflexion

De nombreuses autres équations différentielles peuvent être établies de la même manière, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment :

- ➊ Le modèle de croissance Malthusien en dynamique des populations :  
 $N'(t) = rN(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population.
- ➋ Le modèle de croissance logistique en dynamique des populations :  
 $N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population et  $K$  la capacité d'accueil du milieu.
- ➌ Des problèmes concrets de mélanges ou de cuves qui se vident.

## 4. Vers un modèle de réflexion

De nombreuses autres équations différentielles peuvent être établies de la même manière, en raisonnant comme nous l'avons fait précédemment :

- ➊ Le modèle de croissance Malthusien en dynamique des populations :  
 $N'(t) = rN(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population.
- ➋ Le modèle de croissance logistique en dynamique des populations :  
 $N'(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) N(t)$ , où  $r \in \mathbb{R}$  désigne le taux de croissance de la population et  $K$  la capacité d'accueil du milieu.
- ➌ Des problèmes concrets de mélanges ou de cuves qui se vident.

Cette démarche nous servira notamment en épidémiologie pour modéliser des systèmes d'équations différentielles.

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Exemple 1 : Le modèle de Malthus (1798)

Considérons une population que nous supposerons comme un système fermé : pas de mouvement de population entrant ni sortant. Soit  $N_0$  son effectif initial et  $N(t)$  son effectif à l'instant  $t$ .

Notons également  $a$  (resp.  $b$ ) le nombre de naissances (resp. de morts) par unité de temps.

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Exemple 1 : Le modèle de Malthus (1798)

Considérons une population que nous supposerons comme un système fermé : pas de mouvement de population entrant ni sortant. Soit  $N_0$  son effectif initial et  $N(t)$  son effectif à l'instant  $t$ .

Notons également  $a$  (resp.  $b$ ) le nombre de naissances (resp. de morts) par unité de temps.

Le modèle de Malthus suppose :

- ① **qu'à chaque instant  $t$ ,  $a$  et  $b$  sont proportionnels à la taille de la population** : il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  indépendants de  $t$  tels que  $a = \alpha N(t)$  et  $b = \beta N(t)$ .  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  sont respectivement le taux de natalité et le taux de mortalité intrinsèques de la population.

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Exemple 1 : Le modèle de Malthus (1798)

Considérons une population que nous supposerons comme un système fermé : pas de mouvement de population entrant ni sortant. Soit  $N_0$  son effectif initial et  $N(t)$  son effectif à l'instant  $t$ .

Notons également  $a$  (resp.  $b$ ) le nombre de naissances (resp. de morts) par unité de temps.

Le modèle de Malthus suppose :

- ① **qu'à chaque instant  $t$ ,  $a$  et  $b$  sont proportionnels à la taille de la population** : il existe  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  indépendants de  $t$  tels que  $a = \alpha N(t)$  et  $b = \beta N(t)$ .  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$  sont respectivement le taux de natalité et le taux de mortalité intrinsèques de la population.
- ② **et que pour tout réel  $t \geq 0$ ,  $a - b$  est constant entre deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + \Delta t$  !**

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Exemple 1 : Le modèle de Malthus (1798)

L'accroissement relatif de la population entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$  est

$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t) = \alpha N(t)\Delta t - \beta N(t)\Delta t$ . On a donc :

$$\Delta N(t) = (\alpha - \beta)N(t)\Delta t$$

Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0, on obtient :

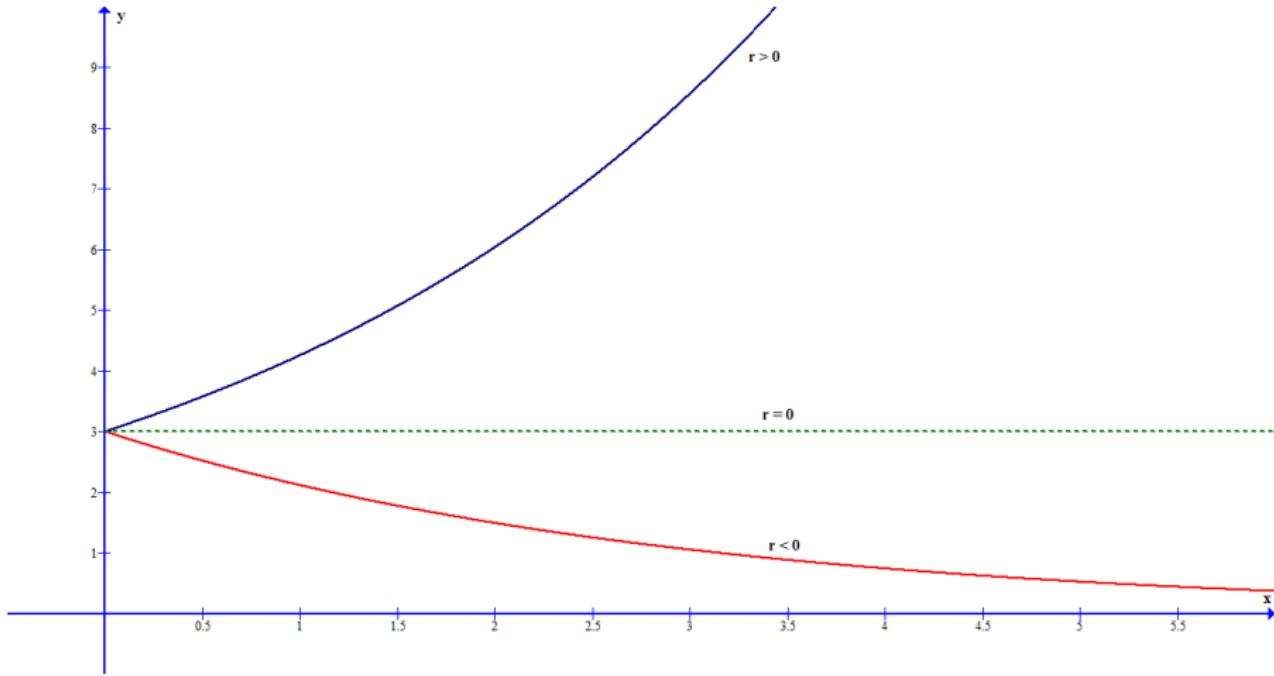
$$N'(t) = (\alpha - \beta)N(t)$$

Posant  $r = \alpha - \beta$ , qui représente le taux de croissance intrinsèque de la population, nous obtenons finalement :

$$N'(t) = rN(t)$$

Comme  $N(0) = N_0$ , la solution de cette EDO est :  $N(t) = N_0 e^{rt}$ .

## 4. Vers un modèle de réflexion



Croissance de la population en fonction du signe de  $r$ .

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Résumé

- ① Nous avons commencé par écrire la variation du nombre d'individus entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :  
$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Résumé

- ① Nous avons commencé par écrire la variation du nombre d'individus entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :  
$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$
- ② Cette variation est proportionnelle à l'effectif de la population à l'instant  $t$  et à la durée  $\Delta t$  indépendamment de  $t$  :  $\Delta N(t) = r\Delta t$  pour un certain réel  $r > 0$  (taux de croissance intrinsèque de la population exprimé en  $ut^{-1}$ ).

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Résumé

- ① Nous avons commencé par écrire la variation du nombre d'individus entre deux instants très proches  $t$  et  $t + \Delta t$  :  
$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t).$$
- ② Cette variation est proportionnelle à l'effectif de la population à l'instant  $t$  et à la durée  $\Delta t$  indépendamment de  $t$  :  $\Delta N(t) = r\Delta t$  pour un certain réel  $r > 0$  (taux de croissance intrinsèque de la population exprimé en  $ut^{-1}$ ).
- ③ Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0 (et en admettant  $N$  dérivable sur  $\mathbb{R}^+$ ), nous obtenons la variation instantanée du nombre d'individus de la population à l'instant  $t$  :  $N'(t) = rN(t).$

## Exemple 2 : Le modèle de Verhüls (1845)

Le modèle de Malthus devient vite irréaliste à long terme : une population grandissant exponentiellement dans un milieu clos va se retrouver à un moment ou un autre à court de ressources, et sa croissance va inexorablement ralentir.

Ce modèle, dit aussi **modèle logistique** prend en compte ce frein à la croissance via les hypothèses suivantes :

- ① Le taux de natalité intrinsèque  $\alpha$  est toujours supposé constant.
- ② Le taux de mortalité intrinsèque est supposé augmenter avec la taille de la population de manière affine :  $\beta$  devient  $\beta(N) = \beta_0 + \beta_1 N$ .

# Vers un modèle de réflexion

## Exemple 2 : Le modèle de Verhülst (1845)

$N'(t) = (\alpha - \beta)N(t)$  se réécrit :

$$N'(t) = \alpha N(t) - (\beta_0 + \beta_1 N(t))N(t)$$

soit

$$N'(t) = (\alpha - \beta_0)N(t) \left[ 1 - \frac{\beta_1}{\alpha - \beta_0} N(t) \right]$$

Posons  $r := \alpha - \beta_0$  et  $K = \frac{\alpha - \beta_0}{\beta_1}$ . On a alors :

$$N'(t) = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t)}{K} \right)$$

## Exemple 2 : Le modèle de Verhülst (1845)

Le coefficient  $r = \alpha - \beta_0$  s'appelle le *taux intrinsèque de croissance* de la population.

- ① Ce taux est intrinsèque dans le sens où il correspond au taux de croissance de la population en l'absence de compétition (cf modèle de Malthus).

## Exemple 2 : Le modèle de Verhulst (1845)

Le coefficient  $r = \alpha - \beta_0$  s'appelle le *taux intrinsèque de croissance* de la population.

- ① Ce taux est intrinsèque dans le sens où il correspond au taux de croissance de la population en l'absence de compétition (cf modèle de Malthus).
- ② Le coefficient  $K$  s'interprète comme la capacité d'accueil du milieu (exprimée en nombre d'individus). On peut le comprendre car :

$$K = \frac{r}{\beta_1} = \frac{\text{taux intrinsèque de croissance (en } ut^{-1})}{\text{coefficient de mortalité (en } ut^{-1} \times \text{effectif}^{-1})}$$

## Exemple 2 : Le modèle de Verhulst (1845)

On prouve (très bon exercice de terminale) que la solution de

$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad \text{est :}$$

$$(\star) \quad N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \quad \text{pour } t \geq 0$$

## Exemple 2 : Le modèle de Verhulst (1845)

On prouve (très bon exercice de terminale) que la solution de

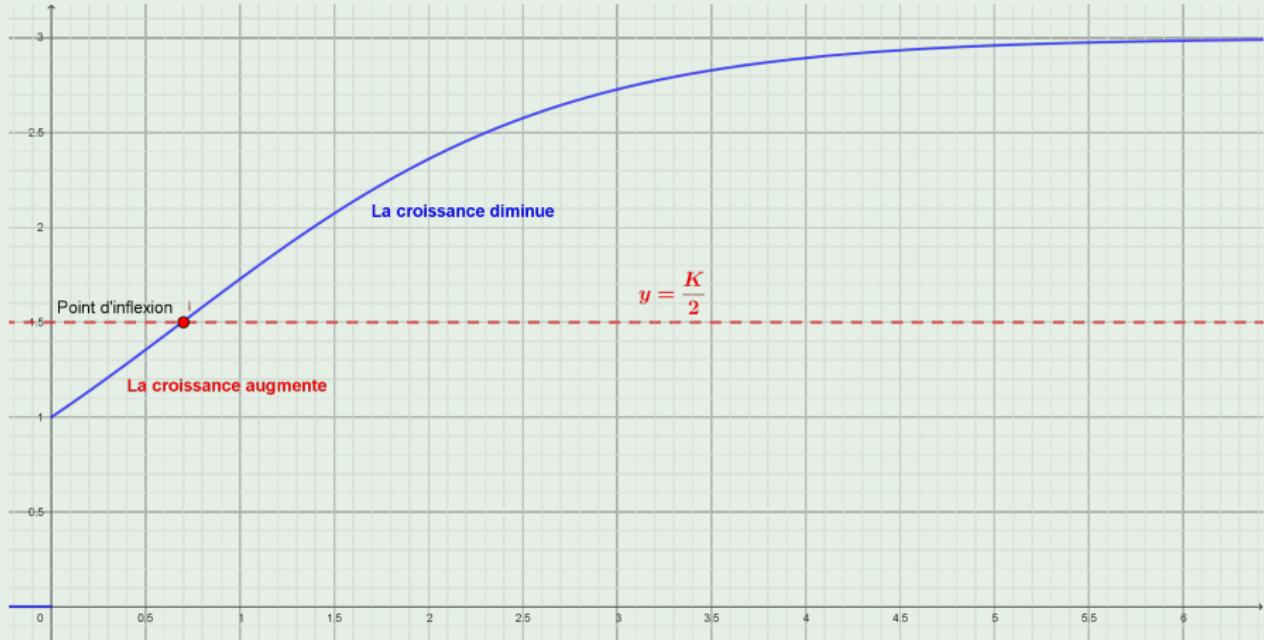
$$\begin{cases} N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right), & t > 0 \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad \text{est :}$$

$$(\star) \quad N(t) = \frac{KN_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \quad \text{pour } t \geq 0$$

- ➊ Il est aisé de vérifier que  $N$  est strictement croissante si  $r > 0$ .
- ➋ Le seul point d'inflexion éventuel de  $N$  a pour abscisse  $\frac{K}{2}$ .

# Vers un modèle de réflexion

## Exemple 2 : Le modèle de Verhülst (1845)

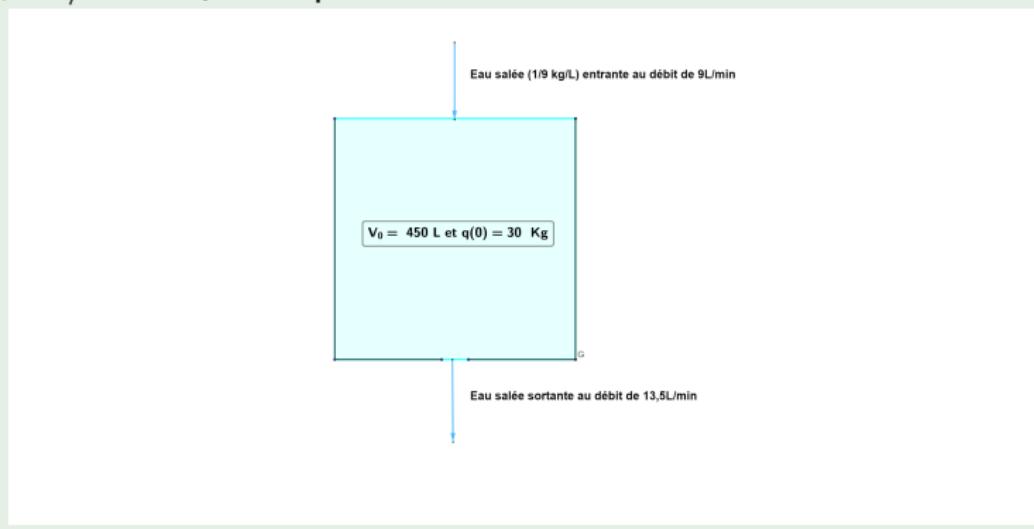


Modèle de croissance logistique avec  $K = 3$ ,  $N_0 = 1$  et  $r > 0$

## 4. Vers un modèle de réflexion

### Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Considérons une cuve pleine de 450 litres contenant initialement 30 kg de sel. On y fait couler de l'eau contenant  $1/9$  kg de sel par litre, à raison de 9 L/min. Le mélange, maintenu homogène par brassage, s'écoule à raison de 13,5 L/min. Quelle quantité de sel restera-t-il au bout d'une heure ?



## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Appelons  $V(t)$  (resp.  $q(t)$ ) le volume d'eau (resp. la quantité de sel) dans la cuve  $t$  minutes après l'instant initial.

Le volume de la cuve diminue de 4,5 L d'eau salée par minute, ainsi comme la cuve a un volume initial de 450 L,  $V(t) = 450 - 4,5t$ .

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Appelons  $V(t)$  (resp.  $q(t)$ ) le volume d'eau (resp. la quantité de sel) dans la cuve  $t$  minutes après l'instant initial.

Le volume de la cuve diminue de 4,5 L d'eau salée par minute, ainsi comme la cuve a un volume initial de 450 L,  $V(t) = 450 - 4,5t$ .

Considérons deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + \Delta t$ . Entre  $t$  et  $t + \Delta t$  :

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Appelons  $V(t)$  (resp.  $q(t)$ ) le volume d'eau (resp. la quantité de sel) dans la cuve  $t$  minutes après l'instant initial.

Le volume de la cuve diminue de 4,5 L d'eau salée par minute, ainsi comme la cuve a un volume initial de 450 L,  $V(t) = 450 - 4,5t$ .

Considérons deux instants infiniment proches  $t$  et  $t + \Delta t$ . Entre  $t$  et  $t + \Delta t$  :

- ➊ La cuve reçoit une quantité de  $9 \times 1/9 \times \Delta t = \Delta t$  g de sel
- ➋ En supposant la concentration de sel qui s'échappe de la cuve, constante sur  $[t; t + \Delta t]$ , la cuve perd  $13,5 \times \frac{q(t)}{V(t)} \Delta t$  g de sel.

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Ainsi,  $\Delta q(t) = q(t + \Delta t) - q(t) = \left(1 - \frac{13,5q(t)}{450 - 4,5t}\right) \Delta t$ .

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Ainsi,  $\Delta q(t) = q(t + \Delta t) - q(t) = \left(1 - \frac{13,5q(t)}{450 - 4,5t}\right) \Delta t$ .

Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0, il vient :

$$q'(t) = 1 - \frac{3q(t)}{100 - t}$$

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

Ainsi,  $\Delta q(t) = q(t + \Delta t) - q(t) = \left(1 - \frac{13,5q(t)}{450 - 4,5t}\right) \Delta t$ .

Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0, il vient :

$$q'(t) = 1 - \frac{3q(t)}{100 - t}$$

C'est une équation de la forme  $y' = a(t)y + b$  dont la résolution n'est pas au programme de Terminale. C'eût été le cas si le coefficient  $a(t)$  avait été constant. Mais pas de panique : la méthode d'Euler vient à la rescousse !

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

La fonction  $q$  est définie sur  $[0; 100]$ , mais comme nous souhaitons calculer  $q(60)$ , nous allons partager l'intervalle de temps  $I = [0; 60]$  en 1000 sous-intervalles. Posons alors  $h = \frac{60}{1000} = 0,06$  (le pas de la méthode).

On définit la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  par :

$$\begin{cases} q_0 = 30 \\ q_{n+1} = q_n + 0,06 \left( 1 - \frac{3q_n}{100 - 0,06n} \right) \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

## Exemple 3 : Une cuve qui se vide et se remplit

La fonction  $q$  est définie sur  $[0; 100]$ , mais comme nous souhaitons calculer  $q(60)$ , nous allons partager l'intervalle de temps  $I = [0; 60]$  en 1000 sous-intervalles. Posons alors  $h = \frac{60}{1000} = 0,06$  (le pas de la méthode).

On définit la suite  $(q_n)_{n \geq 0}$  par :

$$\begin{cases} q_0 = 30 \\ q_{n+1} = q_n + 0,06 \left( 1 - \frac{3q_n}{100 - 0,06n} \right) \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

On trouve  $q_{60} \approx 18,7$  g.

La valeur exacte est 18,72 g. Pas mal... Essayez avec un pas plus petit.

# Vers un modèle de réflexion

résumé

**Variation instantanée de la quantité = flux entrant - flux sortant**

## A vous de jouer !

- ① Un réservoir cubique de 2 m de côté est rempli d'eau à hauteur de 90 cm. Il se vide par l'intermédiaire d'un trou circulaire de 22 mm de diamètre situé sur sa partie inférieure. La vitesse d'écoulement de l'eau est de  $2,5\sqrt{h(t)}$  cm/s où  $h(t)$  est la hauteur d'eau restant dans le réservoir au bout de  $t$  secondes.  
Combien de temps mettra-t-il à se vider ?
- ② Un premier réservoir contient  $0,5m^3$  d'eau pure dans laquelle sont dissous 40 kg de sel. De l'eau pure coule dans ce réservoir à raison de  $3 \times 10^{-4} m^3/s$  et le mélange, maintenu uniforme par brassage, s'écoule en même quantité. Le liquide tombe dans un second réservoir contenant initialement  $0,5m^3$  d'eau pure et s'écoule de ce dernier en même quantité. Quelle quantité de sel contiendra ce second réservoir au bout d'une heure ?

## Introduction

Les grandes épidémies ont toujours frappé l'humanité : la peste noire a décimé à de nombreuses reprises le monde occidental et oriental, le paludisme transmis par les moustiques qui continue de faire des ravages en Afrique, la tuberculose, la grippe ...

## Introduction

Les grandes épidémies ont toujours frappé l'humanité : la peste noire a décimé à de nombreuses reprises le monde occidental et oriental, le paludisme transmis par les moustiques qui continue de faire des ravages en Afrique, la tuberculose, la grippe ...

L'homme a dû apprendre à vivre avec ces maladies et prendre des mesures prophylactiques pour s'en prévenir, les contrôler et même les guérir.

## Introduction

Les grandes épidémies ont toujours frappé l'humanité : la peste noire a décimé à de nombreuses reprises le monde occidental et oriental, le paludisme transmis par les moustiques qui continue de faire des ravages en Afrique, la tuberculose, la grippe ...

L'homme a dû apprendre à vivre avec ces maladies et prendre des mesures prophylactiques pour s'en prévenir, les contrôler et même les guérir.

Bien avant Louis Pasteur, en 1760, le mathématicien Daniel Bernoulli présente à l'académie des sciences de Paris un mémoire intitulé "*Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de la prévenir*". Il y est déjà question de vaccination et de ses bénéfices.

## Modèles compartimentaux

Notre but n'étant pas de dispenser un cours d'épidémiologie, nous nous contenterons dans ce qui suit de mettre en lumière ce qui est appelé : **modèles compartimentaux**.

## Modèles compartimentaux

Notre but n'étant pas de dispenser un cours d'épidémiologie, nous nous contenterons dans ce qui suit de mettre en lumière ce qui est appelé : **modèles compartimentaux**.

La population est partitionnée en plusieurs sous-ensembles disjoints :

- ① Le modèle SIS possède 2 compartiments : les individus susceptibles d'être infectés et les individus infectés.
- ② Le modèle SIR possède 3 compartiments : les individus susceptibles d'être infectés, les individus infectés et les individus guéris (recovered).

D'autres modèles plus élaborés existent comme le modèle SEIR, mais nous ne les aborderons pas dans cet exposé. Ils seront détaillés sur le site : <https://www.lesentiersmathematiques.com>

## Exemple 1 : Modèle SIS

Considérons une population d'effectif constant  $N$  durant notre observation. Une pathologie affecte des individus de cette population. On la partitionne alors en deux groupes disjoints :

- ➊ Le groupe  $S$  des individus susceptibles d'être infectés (mais qui ne le sont pas),
- ➋ Le groupe  $I$  des individus infectés.

## Exemple 1 : Modèle SIS

Considérons une population d'effectif constant  $N$  durant notre observation. Une pathologie affecte des individus de cette population. On la partitionne alors en deux groupes disjoints :

- ➊ Le groupe  $S$  des individus susceptibles d'être infectés (mais qui ne le sont pas),
- ➋ Le groupe  $I$  des individus infectés.

Ainsi, à tout instant  $t$  :  $S(t) + I(t) = N$  donc :

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{dI(t)}{dt}} \quad (*)$$

## Exemple 1 : Modèle SIS

Le modèle SIS fait l' hypothèse qu'entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  infiniment proches :

- ① Le nombre d'individus susceptibles diminue d'un facteur  $\beta$  proportionnel à  $\Delta t$  et à la *proportion d'individus sains* dans la population multipliée par le nombre d'individus infectés.

## Exemple 1 : Modèle SIS

Le modèle SIS fait l' hypothèse qu'entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  infiniment proches :

- ① Le nombre d'individus susceptibles diminue d'un facteur  $\beta$  proportionnel à  $\Delta t$  et à la *proportion d'individus sains* dans la population multipliée par le nombre d'individus infectés.
- ② Les individus infectés guérissent avec un taux de guérison  $\gamma > 0$  proportionnel à  $\Delta t$  et à la proportion d'individus infectés dans la population.

Remarque :  $\beta$  et  $\gamma$  ont pour unité  $ut^{-1}$ .

## Exemple 1 : Modèle SIS

Nous traduisons ceci par : pour tout  $t \geq 0$ ,

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) \Delta t - \gamma I(t) \Delta t$$

Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0, il vient :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma I(t)$$

## Exemple 1 : Modèle SIS

Nous traduisons ceci par : pour tout  $t \geq 0$ ,

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) \Delta t - \gamma I(t) \Delta t$$

Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0, il vient :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta \frac{S(t)}{N} I(t) - \gamma I(t)$$

En vertu de la relation (\*) nous en déduisons aussitôt que

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta \frac{S(t)}{N} I(t) + \gamma I(t)$$

## Exemple 1 : Modèle SIS

Pour éviter de se traîner le facteur  $N$ , on normalise souvent en considérant pour  $S(t)$  et  $I(t)$  les proportions d'individus sains (resp. infectés) dans la population plutôt que leur effectif.

## Exemple 1 : Modèle SIS

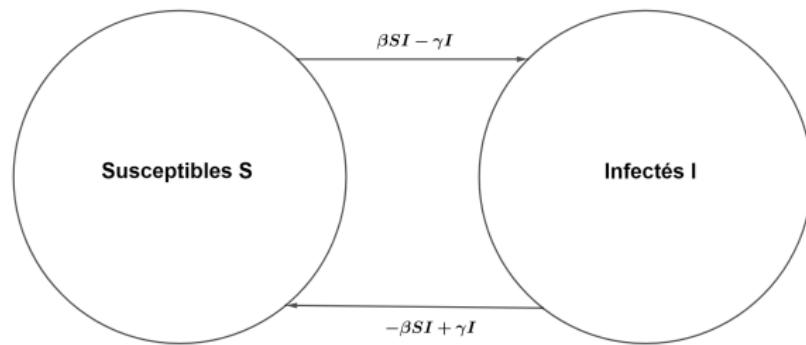
Pour éviter de se traîner le facteur  $N$ , on normalise souvent en considérant pour  $S(t)$  et  $I(t)$  les proportions d'individus sains (resp. infectés) dans la population plutôt que leur effectif.

Nous obtenons alors le système d'EDO qui suit :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) & (1) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \end{cases}$$

Remarque :  $\beta$  et  $\gamma$  ont-ils toujours pour unité  $ut^{-1}$  ?

## Exemple 1 : Modèle SIS



Flux d'individus entre les compartiments S et I

## Exemple 1 : Modèle SIS

Comme presque toujours, il est question de réécriture . . .

Rappelons nos deux équations :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) = I(t)(-\beta S(t) + \gamma) & (1) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = I(t)(\beta S(t) - \gamma) & (2) \end{cases}$$

## Exemple 1 : Modèle SIS

Comme presque toujours, il est question de réécriture ...

Rappelons nos deux équations :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) + \gamma I(t) = I(t)(-\beta S(t) + \gamma) & (1) \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) = I(t)(\beta S(t) - \gamma) & (2) \end{cases}$$

Auriez-vous une idée pour vous ramener à une situation connue ?

Car ce doit être un réflexe : maîtriser un modèle et savoir s'y ramener !

## Exemple 1 : Modèle SIS

Il est encore possible de résoudre explicitement ce système.

En effet :  $S(t) = 1 - I(t)$ .

Reportant ceci dans (2) :  $\frac{dI(t)}{dt} = I(t)(\beta S(t) - \gamma)$ , il vient :

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t)(\beta - \gamma - \beta I(t)), \text{ soit :}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta - \gamma)I(t) \left(1 - \frac{\beta}{\beta - \gamma}I(t)\right)$$

## Exemple 1 : Modèle SIS

Il est encore possible de résoudre explicitement ce système.

En effet :  $S(t) = 1 - I(t)$ .

Reportant ceci dans (2) :  $\frac{dI(t)}{dt} = I(t)(\beta S(t) - \gamma)$ , il vient :

$\frac{dI(t)}{dt} = I(t)(\beta - \gamma - \beta I(t))$ , soit :

$$\frac{dI(t)}{dt} = (\beta - \gamma)I(t) \left(1 - \frac{\beta}{\beta - \gamma}I(t)\right)$$

Nous reconnaissons le modèle logistique avec  $r = \beta - \gamma$  et  $K = \frac{\beta - \gamma}{\beta}$ .

## Exemple 1 : Modèle SIS

Posons  $I(0) = I_0$  (nombre d'infectés initial), alors :

$$I(t) = \frac{K I_0}{I_0 + (K - I_0)e^{-rt}} = \frac{K I_0 e^{rt}}{(K - I_0) + I_0 e^{rt}}$$

D'où

$$S(t) = \frac{(K - I_0) + I_0(1 - K)e^{rt}}{(K - I_0) + I_0 e^{rt}}$$

- ➊ Si  $r = \beta - \gamma > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = K$  : l'épidémie devient **endémique**.

## Exemple 1 : Modèle SIS

Posons  $I(0) = I_0$  (nombre d'infectés initial), alors :

$$I(t) = \frac{K I_0}{I_0 + (K - I_0)e^{-rt}} = \frac{K I_0 e^{rt}}{(K - I_0) + I_0 e^{rt}}$$

D'où

$$S(t) = \frac{(K - I_0) + I_0(1 - K)e^{rt}}{(K - I_0) + I_0 e^{rt}}$$

- ① Si  $r = \beta - \gamma > 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = K$  : l'épidémie devient **endémique**.
- ② Si  $r = \beta - \gamma < 0$ , alors  $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$  : l'épidémie s'éteint.

## Exemple 1 : Modèle SIS

On utilise usuellement l'indicateur  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ .

$R_0 > 1 \iff r > 0$  et  $R_0 < 1 \iff r < 0$ .

Il est appelé **nombre de reproduction élémentaire**.

## Exemple 1 : Modèle SIS

On utilise usuellement l'indicateur  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ .

$R_0 > 1 \iff r > 0$  et  $R_0 < 1 \iff r < 0$ .

Il est appelé **nombre de reproduction élémentaire**.

Ce modèle s'applique à des pathologies récurrentes pour lesquelles l'immunité n'est pas acquise définitivement : rhume saisonnier, grippe, COVID !

# Épidémiologie : modèles SIS et SIR

## Exemple 1 : Modèle SIS

On utilise usuellement l'indicateur  $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$ .

$R_0 > 1 \iff r > 0$  et  $R_0 < 1 \iff r < 0$ .

Il est appelé **nombre de reproduction élémentaire**.

Ce modèle s'applique à des pathologies récurrentes pour lesquelles l'immunité n'est pas acquise définitivement : rhume saisonnier, grippe, COVID !

Ce n'est pas le cas pour certaines pathologies : tétanos, coqueluche, peste, pour lesquelles une fois guéri(e)s, nous sommes immunisé(e)s à vie.  
Ce fait motive le prochain modèle.

## Exemple 2 : Modèle SIR

Considérons une population d'effectif constant  $N$  durant notre observation. Une pathologie affecte des individus de cette population. On la partitionne alors en trois groupes disjoints :

- ➊ Le groupe S des individus susceptibles d'être infectés (mais qui ne le sont pas),
- ➋ Le groupe I des individus infectés.
- ➌ Le groupe R des individus remis (guéris).

## Exemple 2 : Modèle SIR

Considérons une population d'effectif constant  $N$  durant notre observation. Une pathologie affecte des individus de cette population. On la partitionne alors en trois groupes disjoints :

- ➊ Le groupe S des individus susceptibles d'être infectés (mais qui ne le sont pas),
- ➋ Le groupe I des individus infectés.
- ➌ Le groupe R des individus remis (guéris).

Nous travaillerons comme précédemment avec les proportions d'individus, si bien qu'à tout instant  $t$  :  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$  donc :

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

## Exemple 2 : Modèle SIR

Le modèle SIR fait l' hypothèse qu'entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  infiniment proches :

- ① Le nombre d'individus susceptibles diminue d'un facteur  $\beta$  proportionnel à  $\Delta t$  et à la *proportion d'individus sains* dans la population multipliée par le nombre d'individus infectés.

## Exemple 2 : Modèle SIR

Le modèle SIR fait l' hypothèse qu'entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  infiniment proches :

- ➊ Le nombre d'individus susceptibles diminue d'un facteur  $\beta$  proportionnel à  $\Delta t$  et à la *proportion d'individus sains* dans la population multipliée par le nombre d'individus infectés.
- ➋ Les individus infectés guérissent avec un taux de guérison  $\gamma > 0$  proportionnel à  $\Delta t$  et à la proportion d'individus infectés dans la population et donc sont définitivement remis.

## Exemple 2 : Modèle SIR

Nous traduisons ceci par :

$$\textcircled{1} \quad S(t + \Delta t) - S(t) = -\beta S(t)I(t)\Delta t.$$

## Exemple 2 : Modèle SIR

Nous traduisons ceci par :

$$\textcircled{1} \quad S(t + \Delta t) - S(t) = -\beta S(t)I(t)\Delta t.$$

$$\textcircled{2} \quad I(t + \Delta t) - I(t) = \beta S(t)I(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t$$

## Exemple 2 : Modèle SIR

Nous traduisons ceci par :

$$\textcircled{1} \quad S(t + \Delta t) - S(t) = -\beta S(t)I(t)\Delta t.$$

$$\textcircled{2} \quad I(t + \Delta t) - I(t) = \beta S(t)I(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t$$

$$\textcircled{3} \quad R(t + \Delta t) - R(t) = \gamma I(t)\Delta t$$

## Exemple 2 : Modèle SIR

Nous traduisons ceci par :

$$① \quad S(t + \Delta t) - S(t) = -\beta S(t)I(t)\Delta t.$$

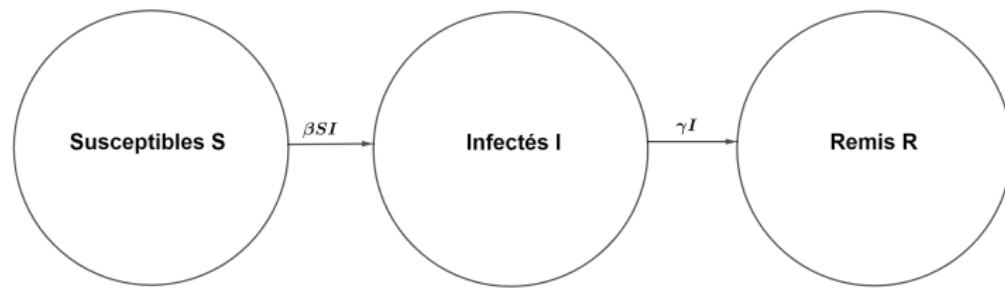
$$② \quad I(t + \Delta t) - I(t) = \beta S(t)I(t)\Delta t - \gamma I(t)\Delta t$$

$$③ \quad R(t + \Delta t) - R(t) = \gamma I(t)\Delta t$$

Divisant par  $\Delta t$  que l'on fait tendre vers 0, il vient :

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) & (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) & (3) \end{cases}$$

## Exemple 2 : Modèle SIR



Flux d'individus entre les compartiments S, I et R

## Exemple 2 : Modèle SIR

Contrairement au cas précédent, le système d'EDO

$$(S) : \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) & (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) & (3) \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution explicite.}$$

## Exemple 2 : Modèle SIR

Contrairement au cas précédent, le système d'EDO

$$(S) : \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) & (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) & (3) \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution explicite.}$$

En revanche, du fait que  $\beta, \gamma > 0$ ,  $S(t), I(t) \geq 0$ , nous obtenons directement que :  $S$  est décroissante et  $R$  est croissante.

## Exemple 2 : Modèle SIR

Contrairement au cas précédent, le système d'EDO

$$(S) : \begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) & (1) \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) & (2) \\ R'(t) = \gamma I(t) & (3) \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution explicite.}$$

En revanche, du fait que  $\beta, \gamma > 0$ ,  $S(t), I(t) \geq 0$ , nous obtenons directement que :  $S$  est décroissante et  $R$  est croissante.

Le cas de la fonction  $I$  est plus complexe et régit la dynamique de l'épidémie : nous pouvons écrire que

$$I'(t) = \gamma I(t) \left( \frac{\beta}{\gamma} S(t) - 1 \right) = \gamma I(t)(R_0 S(t) - 1), \text{ où } R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \text{ a déjà été défini avant.}$$

## Exemple 2 : Modèle SIR

- ① Si  $R_0 S_0 < 1$ , alors  $I'(0) < 0$  et comme  $I(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini (**pourquoi ?**),  $I$  va décroître.

## Exemple 2 : Modèle SIR

- ➊ Si  $R_0 S_0 < 1$ , alors  $I'(0) < 0$  et comme  $I(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini (**pourquoi ?**),  $I$  va décroître.
- ➋ Si  $R_0 S_0 > 1$ , alors  $I'(0) > 0$  et  $I$  va croître. Mais  $S$  décroît, donc il existe un certain instant  $T > 0$  pour lequel  $R_0 S(T) = 1$ .

## Exemple 2 : Modèle SIR

- ➊ Si  $R_0 S_0 < 1$ , alors  $I'(0) < 0$  et comme  $I(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini (**pourquoi ?**),  $I$  va décroître.
- ➋ Si  $R_0 S_0 > 1$ , alors  $I'(0) > 0$  et  $I$  va croître. Mais  $S$  décroît, donc il existe un certain instant  $T > 0$  pour lequel  $R_0 S(T) = 1$ .

Mais alors  $I'(T) = 0$  et  $I$  atteint un maximum  $I_{max}$ .

Pour  $t > T$ ,  $I'(t) < 0$  et  $I$  décroît.

L'épidémie a atteint son seuil critique à l'instant  $T$ .

## Exemple 2 : Modèle SIR

- ➊ Si  $R_0 S_0 < 1$ , alors  $I'(0) < 0$  et comme  $I(t)$  tend vers 0 quand  $t$  tend vers l'infini (**pourquoi ?**),  $I$  va décroître.
- ➋ Si  $R_0 S_0 > 1$ , alors  $I'(0) > 0$  et  $I$  va croître. Mais  $S$  décroît, donc il existe un certain instant  $T > 0$  pour lequel  $R_0 S(T) = 1$ .

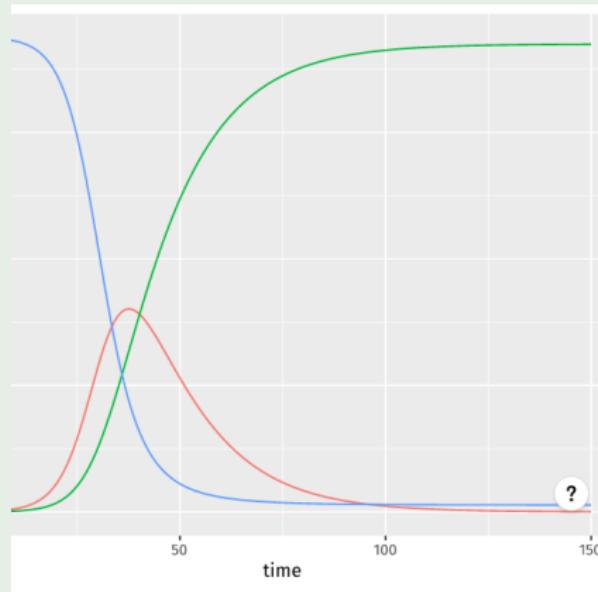
Mais alors  $I'(T) = 0$  et  $I$  atteint un maximum  $I_{max}$ .

Pour  $t > T$ ,  $I'(t) < 0$  et  $I$  décroît.

L'épidémie a atteint son seuil critique à l'instant  $T$ .

Il est aisé de discrétiser le système précédent en regardant l'évolution jour par jour, pour des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$  donnés.

## Exemple 2 : Modèle SIR



Évolution des proportions des compartiments S (en bleu), I (en rouge) et R (en vert)

# Conclusion

Il nous resterait beaucoup à dire sur l'interprétation des coefficients  $\beta$  et  $\gamma$ , du fait de considérer une population d'effectif non constant, etc.

Des documents détaillant ces problématiques seront disponibles bientôt dans l'onglet DIVERS de mon site :

<https://www.lessentiersmathematiques.com>

**MERCI DE VOTRE ATTENTION**