TP radioactivité / fonction exponentielle

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

10 février 2024

Table des matières

1 Notion de radioactivité

En 1896, Henri Becquerel découvre que certaines substances émettent spontanément des rayonnements capables de traverser la matière. Pierre et Marie Curie étudieront notamment un de ces éléments qui prendra le nom de radium.

La radioactivité est d'origine naturelle. L'intégralité des éléments présents sur Terre, y compris les noyaux radioactifs, ont été formés :
— dans la phase de nucléosynthèse aux premiers instants de l'univers, pour les éléments légers (hydrogène et hélium),
— dans les étoiles, pour les éléments jusqu'au fer,
— lors de l'explosion des étoiles, marquant la fin de vie de celles-ci, pour les éléments au-delà du fer.

La radioactivité est à l'origine de l'apparition de la vie sur Terre. C'est la chaleur qu'elle génère qui maintient le noyau terrestre externe sous forme liquide, et qui a permis lors des éruptions volcaniques la formation de l'atmosphère primitive (protection contre les météorites, effet de serre pour diminuer les écarts thermiques entre le jour et la nuit).
C'est aussi la radioactivité qui entretient la combustion au sein du soleil, par le biais des réactions thermonucléaires où l'hydrogène est transformé en hélium.
Un échantillon radioactif peut émettre trois types de particules associées à un rayonnement électromagnétique :

1. Particules α : noyaux d'hélium 4 émis avec une vitesse de 20 000 Km/s, facilement arrêtés avec une feuille de papier.
2. Particules β : se déclinent en deux sous particules, à savoir :
   Les particules β^-, des électrons émis a une vitesse de 280 000 km/s, arrêtés par une feuille d'aluminium.

Les particules β^+, des positrons émis a une vitesse de 280 000 km/s, facilement arrêtés (dès qu'ils rencontrent de la matière : il y a annihilation !)

3. Rayonnement γ : une onde électromagnétique de $\lambda = 10^{-4}$nm. Pour les arrêter il faut quelques mètres de béton.

Les noyaux stables gardent "indéfiniment" la même composition. En revanche, les noyaux instables, entre autre radioactifs, se désintègrent (transforment) en émettant spontanément des particules α ou β souvent accompagnées d'un rayonnement γ.
Sur 350 noyaux naturels, environ 60 sont instables, ainsi que presque tous les noyaux artificiels.

2 Evolution temporelle de la radioactivité

Voici la section qui va particulièrement nous intéresser mathématiquement. Il s'agit, étant donné un élément radioactif ${}^A_ZX$ d'étudier l'évolution du nombre d'atomes radioactifs restants (ne s'étant pas désintégrés) en fonction du temps t d'observation.
Nous noterons N_0 le nombre initial d'atomes radioactifs de l'élément ${}^A_ZX$.

$N(t)$ désigne le nombre d'atomes radioactifs du même élément à l'instant t.
Notre temps d'observation entre $t = 0$ et T est subdivisé en sous-intervalles de temps réguliers $\Delta t = \dfrac{T}{n}$, autrement dit, on observera le nombre d'atomes radioactifs restants de ${}^A_ZX$ aux instants : $0,\ \Delta t,\ 2\Delta t, \dots n\Delta t = T$.
Pendant la durée Δt, la variation $\Delta N(t)$ du nombre d'atomes radioactifs est égale à :

$$\Delta N(t) = N(t + \Delta t) - N(t)$$

Remarquons que pour tout instant t, $\Delta N(t) < 0$.

L'activité moyenne $A(t)$ exprimée en Becquerels (Bq) est le nombre moyen de désintégrations par seconde : $A(t) = -\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t}$. (d'où vient le signe "moins" ?)
Elle est proportionnelle au nombre d'atomes radioactifs restants à l'instant t : $A(t) = \lambda N(t)$, avec λ constante radioactive qui dépend uniquement du nucléide radioactif considéré (Il s'agit de la loi de Rutherford et Soddy (1902)) et s'exprime en s^{-1}.
Ainsi, on a :

$$\frac{\Delta N(t)}{\Delta t} = -\lambda N(t) \quad (*)$$

Remarques :

1. La loi de Rutherford-Soddy traduit que la probabilité pour un atome radioactif de se désintégrer pendant un intervalle de temps Δt est égale à $\lambda \Delta t$.
2. On parle d'activité "**sans mémoire**".

Faisant tendre Δt vers 0 dans (*), on obtient l'équation :

$$\boxed{N'(t) = -\lambda N(t)}$$

Cette équation faisant intervenir une fonction N et sa dérivée N' est une équation où l'inconnue est une fonction ! On parle d'**équation différentielle**.

Quelques valeurs de λ exprimées en s^{-1} ou jour^{-1} ou an^{-1} :
— pour l'uranium : $\lambda = 1,5 \times 10^{-10}$ an^{-1}
— pour le carbone 14 : $\lambda = 1,2 \times 10^{-4}$ an^{-1}

— pour l'iode 131 : $\lambda = 8,5 \times 10^{-2}$ jour^{-1}

Récapitulons : Pour λ donné, on cherche une fonction N définie ici sur $[0; +\infty[$ telle que :

$$\boxed{\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (t \in [0; +\infty[)}$$

2.1 Modélisation algorithmique

La probabilité qu'un atome d'iode 131 se désintègre par jour est égale 0,0085.
L'unité de temps étant le jour, écrivez un script qui sur 100 jours détermine jour par jour, la quantité d'iode 131 restante. Tracez la courbe obtenue.
Pour les plus "geek" : simulez ceci avec un petit graphique qui illustre les désintégrations successives.

2.2 Traitement avec la méthode d'Euler

Rappelons le principe de la méthode d'Euler : Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a; b]$ subdivisé en n intervalles $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ que l'on supposera pour simplifier de même longueur $h_n = \dfrac{b-a}{n}$.
On connaît de plus la valeur initiale $f(x_0) = f(a)$ et une relation du type $f'(x) = g(x, f(x))$ (relation entre f et sa dérivée f').

Pas 1 : On sait calculer $f(x_0)$ et $f'(x_0)$. Donnez l'équation de la tangente T_0 à la courbe représentative de f au point $A_0(x_0; f(x_0))$: $y =$
Comme on ne peut pas calculer directement $f(x_1)$, on remplace cette valeur par $y(x_1)$ calculée grâce à l'équation de T_0. On obtient ainsi un nouveau point $A_1(x_1; y_1)$.

Pas 2 : On fait "comme si" $A_1(x_1, y_1)$ était un point de la courbe représentative de f afin d'utiliser le lien reliant $f'(x)$ à $f(x)$. Ceci nous permet de calculer l'équation de la tangente T_1 à la courbe représentative de f en A_1. On pose alors $y_2 = y(x_2)$ calculé à partir de l'équation de T_1.

Pas suivants : on réitère le processus effectué précédemment. On obtient ainsi une suite de points $A_i(x_i; y_i)$ qui approximent la vraie courbe de f. La relation de récurrence permettant d'obtenir les coordonnées de tous les points $(x_i; y_i)$ est la suivante :

$$\boxed{\begin{cases} x_{k+1} = x_k + h_n \\ y_{k+1} = g(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k) + y_k \end{cases} \quad (0 \leq k \leq n-1)}$$

Ici, N vérifie $N'(t) = -0,0085N(t)$ et $N(0) = 2500$. On restreint l'étude de N à un intervalle $[0; T]$ $(T > 0)$ que l'on subdivise en n sous-intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ $(0 \leq k \leq n-1)$.

1. De quelle nature est la suite (x_k) ? Exprimer x_k en fonction de x_0, k et n.
2. Même question avec (y_k).
3. En utilisant la méthode d'Euler, déterminez à l'aide d'un tableur ou d'un logiciel de votre choix l'allure de la courbe représentative de N sur 100 jours. Comparez-la avec celle obtenue à la sous-section précédente.

2.3 Quelques questions

1. La fonction N dont nous avons obtenu l'idée de la courbe représentative est-elle la seule (unicité) vérifiant notre équation différentielle : $\begin{cases} N'(t) = -\lambda N(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases} \quad (t \geq 0)$
2. On a parlé tout à l'heure d'activité de désintégration **sans mémoire**. Comment comprenez-vous cette phrase ?

3 Pour aller plus loin ...

Il n'est pas rare qu'un atome radioactif, dit atome-père, se désintégrant donne naissance à un "atome-fils" lui-même radioactif. Le processus pouvant se répéter un certain nombre de fois, jusqu'à l'obtention d'un isotope stable, nous avons toute une filiation radiogénique, dont les constantes λ diffèrent. Les géologues qui souhaitent connaître l'âge de certaines roches ainsi que leur origine pétrogénétique, ont souvent recours à l'observation d'échantillons contenant divers éléments en filiation radiogénique (i.e issus d'un même type d'atome radioactif). Nous le reverrons en exercice.

4 Vers la fonction exponentielle

Les sections précédentes nous ont permis de nous poser les problèmes suivants : existe-t-il une certaine fonction N proportionnelle à sa dérivée N', vérifiant une certaine condition initiale, et si oui, quelle peut être l'allure de sa courbe ? La condition initiale : donnée de $N(0)$ est-elle capitale ?
Intéressons-nous au problème suivant : trouver une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ (f est égale à sa propre dérivée). Remarquons qu'ici, nous n'avons pas spécifié de condition initiale.

1. Soit λ un réel. Posons $g = \lambda f$. Prouvez que l'on a aussi $g' = g$ sur $\mathbb{R}$. Conclure sur le nombre de solutions de l'équation différentielle $f' = f$.
2. Si f et g sont deux fonctions vérifiant $f' = f$ et $g' = g$ sur $\mathbb{R}$, que vérifie $f + g$?
3. On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$. Ajoutons-y la condition initiale $f(0) = 1$.
   a) Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x)f(-x)$. Justifier que ϕ est constante égale à 1. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$
   b) Démontrer que si g est une fonction vérifiant $g' = g$ et $g(0) = 1$, alors on a nécessairement $g = f$.
   c) Conclure.

On appelle **fonction exponentielle**, et on note **exp** l'unique fonction f vérifiant l'équation différentielle : $\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R})$