Généralités sur les suites numériques

Yannick Le Bastard (LEGTA Frédéric Bazille)

15 février 2024

Table des matières

1 Définitions - Divers exemples de suites

Définition 1-1 : Une **suite réelle** est une application $\mathbf{u}$ définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note classiquement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite et u_n est appelé le **terme d'indice** n de la suite $\mathbf{u}$.
$\mathbf{u}$ est parfois définie à partir d'un certain rang N et nous noterons $\mathbf{u} = (u_n)_{n\geq N}$.

On note u_n le terme d'indice n de la suite $\mathbf{u}$, mais on doit bien le comprendre comme $u(n)$: l'image de l'entier n par l'application $\mathbf{u}$. La notation par indice est caractéristique des suites.

Exemple 1-2 : On définit les suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ par :

1. pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n$,
2. $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n$.

Nous affirmons que les suites $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont les mêmes !

— La suite $\mathbf{u}$ est clairement celle des puissances entières de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, ...On peut directement calculer u_n en remplaçant l'indice n par la valeur souhaitée : on dit que **u est définie de manière explicite**.

— En revanche, les termes de la suite $\mathbf{v}$ sont définis "de proche en proche". Le calcul du terme v_n nécessite la connaissance du terme précédent v_{n-1}, et bien entendu du terme initial v_0. On dit que **v est définie par récurrence**.

Exercice flash 1 : faire un dessin modélisant le calcul des v_n

De manière heuristique : $u_0 = 2^0 = 1 = v_0$. Puis, pour "passer de" v_0 à v_n, on multiplie consécutivement v_0 n fois de suite par 2 , d'où $v_n = v_0 \times 2^n = 2^n = u_n$. Nous justifierons correctement cette idée dans la section consacrée au raisonnement par récurrence.

Définition 1-3 : On peut définir une suite $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. **de manière explicite**, par une relation du type $u_n = f(n)$, où f est très souvent une fonction réelle de la variable réelle définie sur (au moins) $\mathbb{R}^+$,
2. **par récurrence** (d'ordre 1), par la donnée d'un terme de la suite, souvent le terme initial u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $u_{n+1} = f(n, u_n)$.

Remarque 1-4 : Les suites définies par récurrence sont truffées de pièges : il faut en effet vérifier que le terme u_n existe bien quelle que soit la valeur de l'indice n. Par exemple, la suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{-3 + u_n}$ n'a de sens que pour $n = 0$ et $n = 1$, mais pas au-delà.
Enfin, il existe des suites définies par récurrence d'ordre supérieur à 1 : le calcul de u_n nécessite la connaissance de plus d'un terme le précédant. Un exemple fondamental et non moins classique est la suite de Fibonacci, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par la relation $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. On parle de suite récurrente (linéaire) d'ordre 2.

Exemples 1-5 : Calculez pour chacune des suites données les termes u_0 à u_3. On admet que les suites définies par récurrence sont parfaitement licites *i.e* u_n existe quel que soit l'entier naturel n.

1. $u_n = 2n^2 - 3n + 1$
2. $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+1}$
3. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n^2$

Réponses :

1. $u_0 = 1,\ u_1 = 0,\ u_2 = 3,\ u_3 = 10$
2. $u_0 = 2,\ u_1 = \dfrac{3}{2},\ u_2 = \dfrac{4}{3},\ u_3 = \dfrac{5}{4}$
3. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = \dfrac{3}{2},\ u_3 = \dfrac{5}{3}$
4. $u_0 = 1,\ u_1 = 2,\ u_2 = 5,\ u_3 = 14$

Quiz 1-6 : éventuellement plusieurs réponsse exactes.

1. Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} - u_n = 3$. Alors :
   (a) $u_n = 3n - 2$ (b) $u_n = 2 + 3n$ (c) $u_{10} = 32$ (d) $u_{34} = 104$
2. Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 5u_n$. Alors :
   (a) $u_n = 5n + 2$ (b) $u_n = 2 \times 5^n$ (c) $u_{10} = 52$ (d) $u_3 = 250$

3. Une suite réelle dont la différence entre deux termes consécutifs est constante, est une suite :
(a) géométrique (b) arithmétique (c) autre.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q et si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q', alors :
(a) $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q+q'$ (b) $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison qq' (c) $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison qq' (d) $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q/q'

Réponses :

1. (b), (c) et (d)
2. (b) et (d)
3. (b)
4. (c)

Représentation des suites réelles : Se représenter une situation, même de manière incomplète ou imparfaite, est déjà un premier pas vers la compréhension. En Mathématiques, la rigueur et l'intuition sont intimement liées, et laisser la part belle à l'une plutôt qu'à l'autre, est une malheureuse rupture d'équilibre.
Mais, bonne nouvelle, elles sont totalement **complémentaires** et non opposées ! Aussi, travailler son intuition empêche la stérilité résultant d'un excès de rigueur. Et cette dernière apporte le crédit nécessaire à nos idées parfois foisonnantes dans tous les sens.

On peut représenter les termes d'une suite comme un nuage de points de coordonnées (n, u_n) ou sur un axe horizontal.

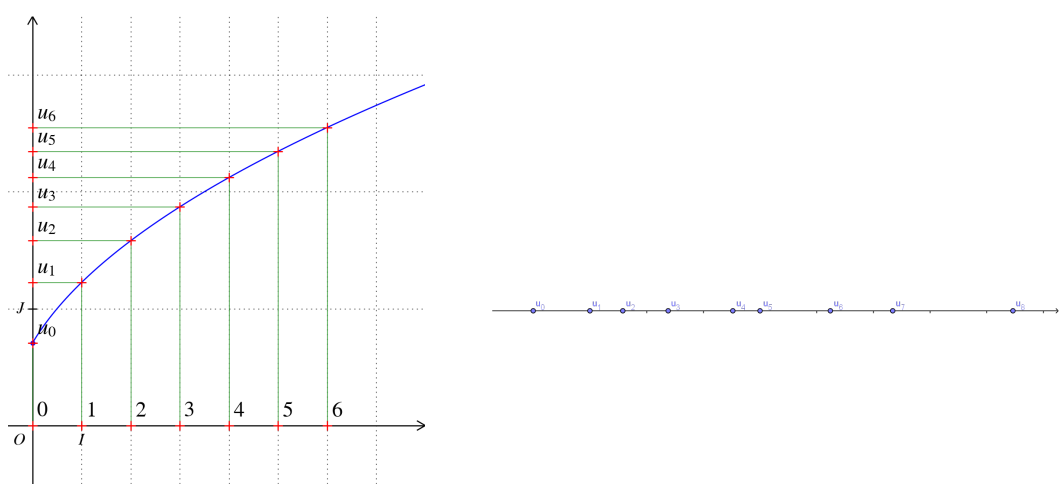

Figure 1 – Nuage de points sur une courbe et sur un axe

Les termes d'une suite définie par récurrence se représentent sur l'axe des abscisses : $\boxed{\textbf{VIDEO 0}}$.

2 Les fondamentaux

2.1 Majoration - minoration - sens de variation

Les définitions qui suivent sont essentielles à connaître et à savoir se représenter graphiquement.

Définition 2-1-1 : Soit $\mathbf{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors $\mathbf{u}$ est :

1. **majorée** (resp. **minorée**) s'il existe un réel M (resp. un réel m) tel que pour tout entier naturel n : $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq m$).
2. **bornée** si $\mathbf{u}$ est majorée et minorée *i.e* s'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n : $|u_n| \leq M$.
3. **strictement croissante** (resp. **strictement décroissante**) si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
4. **monotone** (resp. strictement monotone) si $\mathbf{u}$ est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

Exercice flash 2 : faire un dessin modélisant chacune des situations

Remarque 2-1-2 : Très souvent, nous le verrons un peu plus loin, nous nous intéresserons aux ***propriétés asymptotiques*** des suites, *i.e* vraies ***à partir d'un certain rang*** (**apcr**). Ce sera le cas notamment du sens de variation d'une suite ou de son signe.

Remarque 2-1-3 : Les définitions précédentes peuvent se formaliser mathématiquement à l'aide de *quantificateurs*. Ceci aide à comprendre une formulation du type : "il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n ...", **en aucun cas** synonyme de "pour tout entier naturel n, il existe un réel M tel que ...". Ceci est très important à comprendre.
Par ailleurs, un majorant ou un minorant d'une certaine suite $\mathbf{u}$:

— d'une, ne dépendent PAS de n,
— et de deux, ne sont pas uniques : Si M majore $\mathbf{u}$, alors tous les M' supérieurs à M majorent aussi $\mathbf{u}$.

Exemples 2-1-4 : De l'importance de cerner rapidement les propriétés d'une suite (quand cela est possible!). C'est le cas avec les exemples qui suivent :

1. La suite de terme général $u_n = n^2$ est strictement croissante, minorée, mais non majorée.
2. la suite de terme général $u_n = -n + \sin n$ est décroissante, majorée mais non minorée.
3. La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante, et bornée.
4. La suite de terme général $u_n = (-2)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée.

Pour ce faire, une propriété très pratique nous permet de déterminer le comportement d'une suite $\mathbf{u}$ **définie explicitement** :

Théorème 2-1-5 : Soit f une fonction définie sur $D = [0; +\infty[$ et $\mathbf{u}$ la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$. Alors :

1. $\mathbf{u}$ est majorée (resp. minorée, resp. bornée) si f est majorée (resp. minorée, resp. bornée) sur D.
2. $\mathbf{u}$ est croissante (resp. décroissante) si f est croissante (resp. décroissante) sur D.

$\triangleright$ La démonstration est immédiate vu que $\mathbf{u}$ est la restriction de f à $\mathbb{N}$.

Remarque 2-1-6 : † † † Le théorème 1-2-1-5 ne concerne que les suites définies de manière explicite et s'avère **totalement faux** pour les suites définies par récurrence comme nous le verrons à la section 1.3. **Vous pouvez faire ici l'indispensable exercice 0**. **VIDEO 1**

Exercice flash 3 : Construire les cinq premiers termes de la suite **u** définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$ ainsi que ceux de la suite **v** définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = f(v_n)$, où $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$. On reportera les termes de **v** sur l'axe des abscisses.

Rappels : Nous rappelons quelques résultats fondamentaux sur les suites arithmétiques et géométriques vues en classe de première.

Suites arithmétiques :

1. Une suite **u** est appelée **suite arithmétique** s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} - u_n = r$. r est appelée la **raison** de la suite.
2. Soit **u** une suite arithmétique de raison r : **u** est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $r > 0$ (resp. $r < 0$).
3. Soit **u** une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + rn$. La réciproque est vraie : ainsi les suites arithmétiques sont les suites **u** de terme général $u_n = an + b$.
4. La somme S de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale à :

$$S = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Suites géométriques :

1. Une suite **u** est appelée **suite géométrique** s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = qu_n$. q est appelée la **raison** de la suite.
2. Soit **u** une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Alors pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$. La réciproque est vraie : ainsi les suites géométriques sont les suites **u** de terme général $u_n = b \times a^n$.
3. Soit **u** une suite géométrique de premier terme $u_0 > 0$ et de raison q : **u** est strictement croissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si $q > 1$ (resp. $0 < q < 1$). Nous laissons le lecteur traduire dans le cas où $u_0 < 0$.
4. La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est égale à :

$$S = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

Exemple 2-1-7 : On lance une balle dans un tube en plexiglas d'une hauteur de 10 mètres. Elle rebondit chaque fois aux $2/3$ de sa hauteur précédente. On considère qu'elle est immobile si la hauteur de son rebond est inférieure à 1 mm. Calculez la distance parcourue par la balle à 10^{-3} près et le nombre de rebonds qu'elle aura effectué.

Réponse : Soit u_n la hauteur de la balle et d_n la distance parcourue (exprimée en mètres) après n rebonds.
Avant de donner une solution théorique, tentons une approche informatique. Bien sûr, un petit soupçon de mathématiques sera nécessaire afin de justifier le bien-fondé du script !

```python
# la fonction qui compte le nombre de rebonds
def rebonds(H):          #H est la hauteur initiale de la balle en mm
    r = 0                #r est le nombre de rebonds initial
    while H > 1 :
        H = (2/3)*H      #rebond aux 2/3 de la hauteur precedente
        r = r + 1        #raccourci : r += 1
    return r - 1         #le dernier r pour lequel H > 1 : r-1 (decalage !)

# la fonction qui calcule la distance parcourue
def distance(H):
    d = H                #la balle tombe d'une hauteur H la premiere fois
    while H > 1 :
        H = (2/3)*H      #raccourci : H /= (2/3)
        d = d + 2*H      #raccourci : d += 2*H
    return d - 2*H       #Attention au decalage

#Programme principal
H = float(input("Hauteur initiale de la balle en mm ? ")) #H = 10000 ici
print("La balle a fait ",rebonds(H), "rebonds")
print("La balle a parcouru ", round(distance(H)/1000,3), "m") #0,001 pres
```

On trouve 22 rebonds pour une distance parcourue de 49,995 m. Résolvons donc de manière théorique le problème.
Par hypothèse $u_0 = 10$ et pour tout entier natutel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$. On a donc : $u_n = 10\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

Comme la balle tombe d'abord d'une hauteur initiale de 10 m, on a $d_n = u_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2u_k$ *i.e*
$d_n = 10 + 2 \times \dfrac{20}{3}\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}$, soit $d_n = 10 + 40\left(1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.
Il reste à trouver la valeur de n, correspondant au nombre de rebonds effectués par la balle.
La suite $\mathbf{u}$ est strictement décroissante : sa raison est comprise strictement entre 0 et 1 et son premier terme est strictement positif. Si N désigne le premier entier naturel tel que $u_N \leq 0,001$, alors $n = N - 1$.
En début d'année, avant que le logarithme népérien soit abordé, on peut se contenter de programmer la suite $\mathbf{u}$ et de déterminer le dernier entier naturel n tel que $u_n > 0,001$. Sinon, $n = \left\lfloor \dfrac{\ln(0,0001)}{\ln(2/3)} \right\rfloor = 22$ puis $d_{22} \approx 49,995$ m.

Vous pouvez faire ici les exercices 1 à 4.

2.2 Notion de valeur d'adhérence (Hors-programme)

La notion de valeur d'adhérence, qui n'est pas au programme du secondaire, est cependant très utile pour aborder la notion de limite, qui elle, l'est totalement ! Nous la présenterons donc de manière heuristique, sans définition précise, à travers plusieurs exemples à bien connaître, et la garderons bien au chaud dans un petit coin de notre tête pour la seconde partie de cet ouvrage dédiée aux mathématiques enseignées au niveau L1.

Exemple 2-2-1 : Considérons la suite $\mathbf{u}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.

De manière évidente : $u_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Tous les termes d'indice pair de $\mathbf{u}$ sont égaux à 1 et tous les termes d'indice impair de $\mathbf{u}$ sont égaux à -1. On peut écrire que pour tout entier naturel n, $u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.
Dans un certain sens, une infinité de termes de la suite $\mathbf{u}$ s'accumulent "autour de" 1 et de -1, en fait exactement en 1 et -1 dans le cas présent.

Exemple 2-2-2 : Considérons la suite $\mathbf{u}$ de terme général $u_n = \sin n$. La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et prend pour valeurs tous les réels de $[-1; 1]$.
Qu'en-est-il si nous restreignons l'ensemble de définition de la fonction sinus à $\mathbb{N}$? Il semble que les termes u_n puissent s'approcher de n'importe quelle valeur $y \in [-1; 1]$.

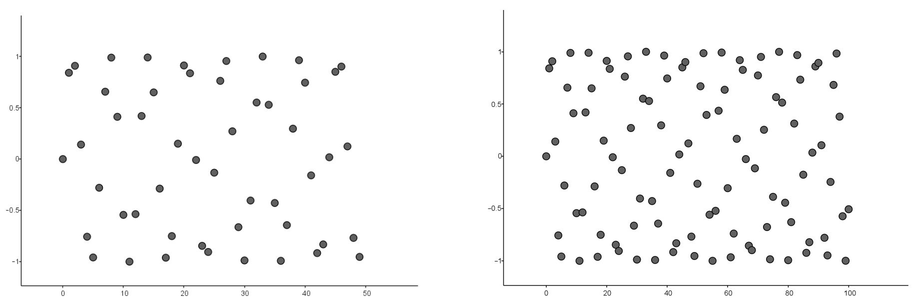

FIGURE 2 – Nuage de points

Et cette impression se vérifie ! Nous prouverons dans la partie 2 de cette ouvrage que les termes de la suite $\mathbf{u}$ s'accumulent autour de n'importe quelle valeur y de $[-1; 1]$. Plus précisément, si l'on se donne une "bande de sécurité" $[y - \epsilon; y + \epsilon]$ autour d'un réel $y \in [-1; 1]$, cette dernière contient une infinité de termes u_n, aussi petit ϵ soit-il ! Nous dirons que tout $y \in [-1; 1]$ est une ***valeur d'adhérence*** de la suite $\mathbf{u}$ $i.e$ que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\mathbf{u}$ est l'intervalle $[-1; 1]$.

Exemple 2-2-3 : La suite $\mathbf{u}$ de terme général $u_n = n$ n'a pas de valeur d'adhérence. En revanche, la suite $\mathbf{v}$ de terme général $v_n = \dfrac{1}{n}$ si n est impair et $v_n = n$ si n est pair admet une unique valeur d'adhérence : 0.

Exercice flash 4 : faites un graphique

Pour résumer, si **une** infinité de termes u_n de la suite $\mathbf{u}$ "s'accumulent" autour d'une valeur réelle a, on dit que a est une **valeur d'adhérence** de $\mathbf{u}$. Un cas très important où cette valeur d'adhérence est unique est abordée dans la section suivante.

2.3 Notion de limite

Intéressons-nous à la suite $\mathbf{u}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 + \dfrac{1}{n^2}$. Nous allons étudier le *comportement asymptotique de* $\mathbf{u}$, c'est-à-dire les valeurs u_n prises par $\mathbf{u}$ lorsque n devient grand. Nous pouvons déjà commencer par calculer les premiers termes à 10^{-3} près :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	3	$2,25$	$2,111$	$2,062$	$2,04$	$2,028$	$2,02$	$2,016$	$2,012$

Il semble que plus n grandisse, plus les termes u_n se rapprochent de $\ell = 2$ (en décroissant strictement).

Il en va de même pour la suite $\mathbf{v}$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = 2 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ dont les termes v_n se rapprochent de $\ell = 2$ quand n devient grand, mais en oscillant de plus en plus faiblement autour de 2.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	1	$2,5$	$1,667$	$2,25$	$1,8$	$2,167$	$1,86$	$2,13$	$1,89$

On peut formaliser l'intuition précédente en "coinçant" d'aussi près que l'on veut la valeur ℓ autour de laquelle tous les termes de la suite $\mathbf{u}$, sauf un nombre fini d'entre eux, semblent s'accumuler.

Définition 2-3-1 (limite finie) : Soit $\mathbf{u}$ une suite réelle. On dit que le réel ℓ est **limite** de la suite $\mathbf{u}$ si pour tout intervalle ouvert $]a;b[$ contentant ℓ il existe un rang N à partir duquel tous les u_n appartiennent à $]a;b[$.
Sans perte de généralité (réfléchissez bien pourquoi), on peut supposer que l'intervalle $]a;b[$ est de la forme $]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$ $(\epsilon>0)$. La définition précédente s'écrit alors :

Le réel ℓ est **limite** de la suite $\mathbf{u}$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n appartiennent à $]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$. On note $\boxed{\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n}$.

La définition précédente dit que si l'on se donne un petit intervalle ouvert centré en ℓ, tous les termes de la suite, sauf un nombre fini d'entre eux, sont compris dans cet intervalle. On peut réduire la longueur de cet intervalle autant que voulu, ce qui a pour effet de générer des rangs N de plus en plus grands.

Dessin et animation Geogebra : **VIDEO 2 a**

Théorème 2-3-2 : Si une suite réelle $\mathbf{u}$ a pour limite ℓ, cette dernière est unique.
Démonstration : Supposons que la suite $\mathbf{u}$ possède deux limites ℓ et ℓ' distinctes. Alors $\epsilon = |\ell-\ell'| > 0$. D'après l'inégalité triangulaire, on a pour tout entier naturel n :
$|\ell-\ell'| \leq |\ell-u_n| + |u_n-\ell'|$.
Comme $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors il existe un rang N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, on a $|u_n-\ell| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Comme $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, alors il existe un rang N' tel que pour tout entier naturel $n \geq N'$, on a $|u_n-\ell'| < \dfrac{\epsilon}{2}$.
Mais alors :
Pour tout entier naturel $n \geq \max(N,N')$: $\epsilon = |\ell-\ell'| \leq |\ell-u_n| + |u_n-\ell'| < 2\times\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
Contradiction !
Ainsi, la limite d'une suite, si elle existe, est unique. ⊠

On peut maintenant parler de <u>**LA**</u> limite d'une suite $\mathbf{u}$.

Définition et remarque 2-3-3 : Si une suite $\mathbf{u}$ a pour limite réelle ℓ, on dit que $\mathbf{u}$ **converge** vers ℓ ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ quand n tend vers $+\infty$.

Pour rebondir sur le paragraphe concernant les valeurs d'adhérence, si une suite **u** a une limite finie ℓ, cette dernière est une valeur d'adhérence de **u** et c'est la seule. En effet, la définition de la limite d'une suite assure qu'une fois une précision ϵ fixée, **"tous les termes de u, sauf un nombre fini, s'accumulent autour de ℓ" à ϵ près**. Les u_n de rapprochent donc aussi près de ℓ que l'on souhaite, pourvu que n soit suffisamment grand.
† † † Une suite **u** peut avoir une unique valeur d'adhérence sans pour autant converger vers cette dernière : *c.f* le contre-exemple 2-2-3.

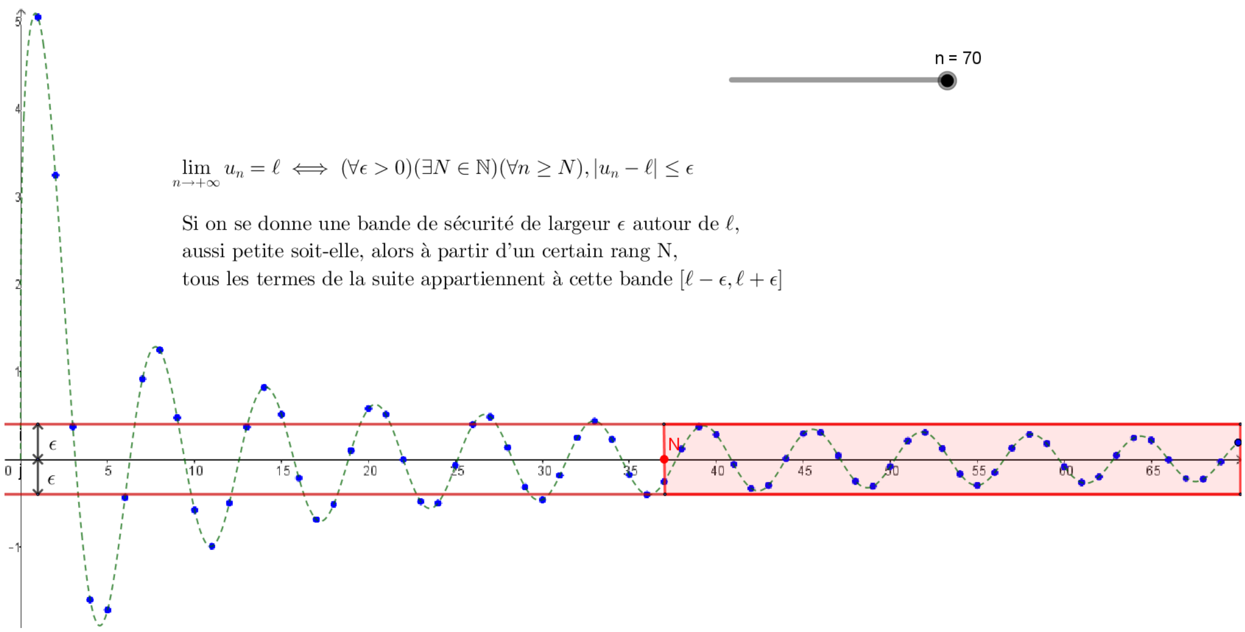

FIGURE 3 – Suite convergente

Exemples et contre-exemples 2-3-4 :

1. Les suites de terme général $u_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$ et $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ convergent vers 0.
2. La suite de terme général $w_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.
3. La suite de terme général $z_n = \sin n$ n'a pas de limite.

Démonstration : Au niveau de la Terminale Maths complémentaires ou même spécialité, on peut se contenter d'admettre les résultats du 1. : plus n grandit, plus $\dfrac{1}{n}$ se rapproche de 0. Il en est de même pour $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ceci dit, revenir à la définition de la limite ne pose pas trop de problème. Nous conseillons au lecteur de faire la démarche.
En revanche nous allons démontrer le point 2., et quitte à s'envoler dans l'abstraction et admettre provisoirement un résultat théorique, nous traiterons même le cas du point 3 (exercice 5).
Supposons par l'absurde que la suite de terme général $(-1)^n$ admette une limite $\ell \in \mathbb{R}$. En choisissant $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, on peut trouver un entier naturel N tel que si n est supérieur ou égal à N, alors $|(-1)^n - \ell| < \dfrac{1}{2}$. Donc :

— Pour tous les entiers naturels n impairs supérieurs ou égaux à N, on a $|-1-\ell| = |1+\ell| < \dfrac{1}{2}$. D'où $-\dfrac{3}{2} < \ell < -\dfrac{1}{2}$.

— Pour tous les entiers naturels n pairs supérieurs ou égaux à N, on a $|1-\ell| < \dfrac{1}{2}$. D'où $\dfrac{1}{2} < \ell < \dfrac{3}{2}$.

La contradiction éclate aussitôt !
Nous en concluons donc que la suite $\mathbf{w}$ n'a pas de limite, ce qui était déjà intuitivement évident d'un point de vue graphique. ⊠

Propriété 2-3-5 (bornitude) : Toute suite convergente est bornée.

Démonstration : On rappelle que $||a|-|b|| \leq |a-b|$.
Cela dit, soit $\mathbf{u}$ une suite convergente de limite ℓ. Alors en prenant par exemple $\epsilon = 1$, il existe un rang N tel que pour tout entier naturel $n \geq N$, $|u_n - \ell| < 1$.
Tenant compte du rappel, on a pour tout entier naturel $n \geq N$: $|u_n| < |\ell| + 1$.
Donc **pour tout entier naturel** n : $|u_n| \leq \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell|+1)$. Donc $\mathbf{u}$ est bornée. ⊠

Propriété 2-3-6 (signe des termes) : Soit $\mathbf{u}$ une suite convergente de limite réelle ℓ. Si $\ell > 0$ (resp. si $\ell < 0$), alors à partir d'un certain rang, tous les u_n sont strictement positifs (resp. strictement négatifs).

Démonstration : On ne traite que le cas $\ell > 0$: donc on peut trouver un réel strictement positif ϵ tel que $\ell - \epsilon > 0$ (faire un dessin). Pour cet ϵ, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n appartiennent à $]\ell-\epsilon;\ell+\epsilon[$. Donc si $n \geq N$, $u_n > \ell - \epsilon > 0$. ⊠

† † † les termes u_n d'une suite convergente u peuvent être tous strictement positifs (ou strictement négatifs) sans que la limite le soit. Un contre-exemple classique est la suite $\mathbf{u}$ définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{1}{n}$: $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n > 0$ mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Les inégalités strictes se transforment en inégalités larges à la limite

.

Définition 2-3-7 (limite infinie) : Soit $\mathbf{u}$ une suite réelle. On dit que la suite $\mathbf{u}$ a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel strictement positif A, il existe un rang N à partir duquel tous les u_n sont supérieurs à A (resp. inférieurs à $-A$).

Dessin et animation Geogebra : VIDEO 2 b

Autrement dit, si $\mathbf{u}$ tend vers $+\infty$, la suite $\mathbf{u}$ "n'a pas de plafond" : quelle que soit le réel $A > 0$ que l'on se donne, aussi grand soit-il, nous sommes certains qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite vont dépasser A.

Propriété 2-3-8 : Limites usuelles (début d'année).

1. Les suites de terme général n^k $(k \in \mathbb{N}^*), e^n, \ln n, q^n$ $(q > 1)$ tendent vers $+\infty$.
2. Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^k}$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{\ln n}$, tendent vers 0.

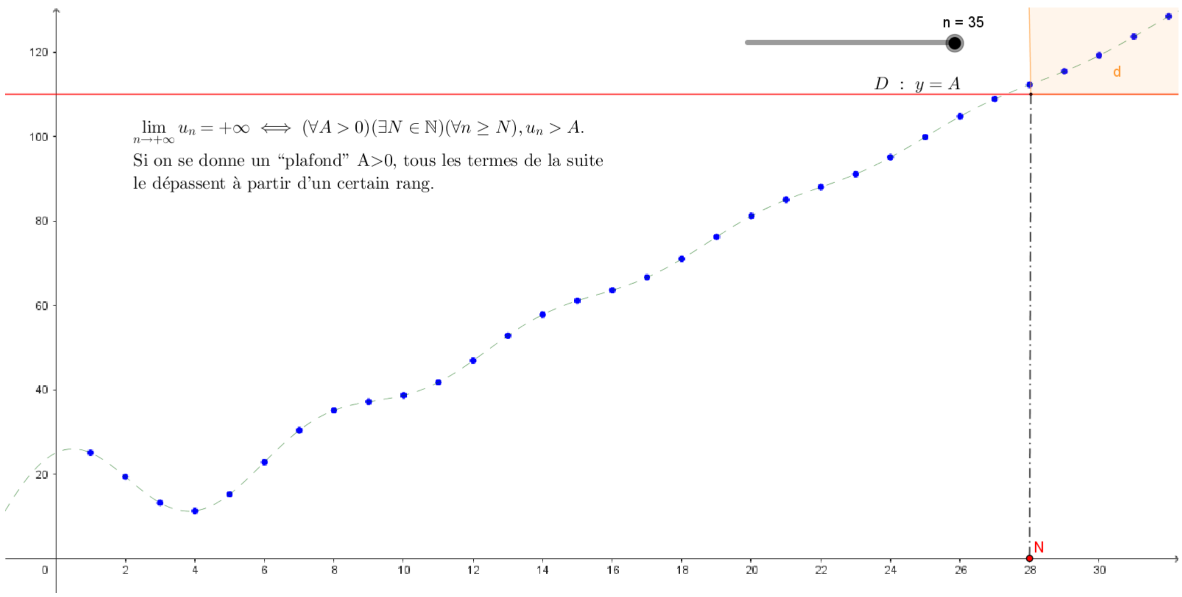

FIGURE 4 – Suite divergente vers $+\infty$

Résumons les situations et le vocabulaire associé :

	Convergence	**Divergence**
u a une limite finie	OUI	NON
u a une limite infinie	NON	OUI
u n'a pas de limite	NON	OUI

2.4 Opérations sur les limites

La plupart des suites que nous rencontrons en pratique ne sont pas des "suites de référence", mais peuvent s'interpréter comme la somme, le produit, l'inverse, le quotient, la composée de telles suites. Il est donc important de pouvoir manipuler ces expressions.

Soient **u** et **v** deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$. On suppose dans tout ce paragraphe que les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ EXISTENT.
Dans les tableaux qui vont suivre, le symbole ?? ne signifie pas que la limite n'existe pas, mais que nous ne pouvons pas conclure en toute généralité. Nous devons donc effectuer un traitement au cas par cas. On parle dans ce cas d'*indétermination* ou de ***forme indéterminée***.

Somme et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	??

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $+\infty - \infty$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $u_n = n+\ell$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) = \ell$.

— On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $u_n = 2n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite en posant $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais $(u_n + v_n) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Produit et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	∞	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n$	$\ell\ell'$	∞	? ?

Explicitons le cas de la **forme indéterminée** $\infty \times \mathbf{0}$:

— On peut obtenir n'importe quel réel ℓ en posant $u_n = \dfrac{\ell}{n}$ et $v_n = n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = \ell$.

—

— On peut obtenir $\pm\infty$ en posant $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = +\infty$.

— On peut ne pas obtenir de limite en posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, mais $(u_n v_n) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite.

Remarquons que le produit d'une constante réelle k par le terme général u_n d'une suite ne pose aucun problème : si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} k u_n = k\ell$.
Si $k \neq 0$ et si la limite de $\mathbf{u}$ est infinie, il s'agit d'appliquer la règle des signes. Et si $k = 0$? ? ? Nous n'osons pas insulter l'intelligence du lecteur avec ce cas !

Inverse et limites

			$u_n > 0$ **apcr**	$u_n < 0$ **apcr**	sinon
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0	0	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$	? ?

Conjuguant les tableaux des produit et inverse, on obtient celui des quotients :

Quotient et limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	ℓ ou ∞	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0 avec v_n de signe constant	0	∞
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	∞	∞	? ?	? ?

Retenons donc les quatre formes indéterminées au programme du secondaire :

$$\boxed{+\infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}}$$

Signalons enfin un résultat très utile de composition que nous utilisons fréquemment dans le cadre des fonctions continues.

Théorème 2-4-1 : Soit $\mathbf{u}$ une suite réelle à valeurs dans un intervalle I et soit f une fonction définie sur I. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = L$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$.

Exemple 2-4-2 :

1. Donner deux exemples de suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers $+\infty$ et telles que $\dfrac{u_n}{v_n}$:

   a) tende vers un réel ℓ b) tende vers $+\infty$ c) n'a pas de limite
2. Après avoir justifié de la présence d'une forme indéterminée, levez cette dernière en réécrivant le terme général des suites définies pour tout entier naturel n par :

   a) $u_n = n^2 - 3n + 1$ b) $u_n = 4^n - 2^n$ c) $u_n = \dfrac{n^2 - 2n}{n^3 + 1}$ d) $u_n = e^{\dfrac{4n^2+n}{n^2+1}}$

Démonstration :

1. a) $u_n = n\ell$ et $v_n = n$ conviennent. b) $u_n = n^2$ et $v_n = n$ conviennent. c) $u_n = (-1)^n n$ et $v_n = n$ conviennent.
2. a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-n+1) = -\infty$, donc nous sommes en présence d'une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Il y a plusieurs manières de lever l'indétermination, mais nous retiendrons que pour les fonctions polynomes, il suffit de factoriser le terme de plus haut degré. Ici, $u_n = n^2\left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) = 1$. Donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, donc nous sommes en présence d'une forme indéterminée $+\infty - \infty$. Factorisons par 4^n, le terme qui semble, et qui est, prépondérant dans l'expression de u_n. Donc $u_n = 4^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{4}\right)^n\right)$. Or si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$ et si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{4}\right)^n = 0$, donc par différence $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 - \left(\dfrac{2}{4}\right)^n\right) = 1$, puis enfin par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

   c) Le numérateur de u_n est sous forme indéterminée $+\infty - \infty$, mais on peut comme au a) prouver qu'il tend vers $+\infty$. Le dénominateur tend clairement vers $+\infty$. Nous somme donc en présence d'une forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

   L'idée est de factoriser le terme de plus haut degré du numérateur et le terme de plus haut degré du dénominateur : $u_n = \dfrac{n^2(1 - \frac{2}{n})}{n^3(1 + \frac{1}{n^3})} = \dfrac{1 - \frac{2}{n}}{n(1 + \frac{1}{n^3})}$.

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{2}{n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 + \dfrac{1}{n^3}) = +\infty$ par somme et produit. Donc finalement, par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   d) On prouve comme au c) que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4n^2+n}{n^2+1} = 4$. Or par continuité de la fonction exponentielle en $x = 4$: $\lim\limits_{x\to4} e^x = e^4$. Donc par le thèorème 1-2-4-1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^4$.

Nous retiendrons que factoriser le terme dominant nous permet souvent, déjà dans le cas des fonctions rationnelles (quotient de deux fonctions polynomes) de lever des indéterminations. Encore faut-il préciser ce qu'on appelle "terme dominant" (Hors programme dans le secondaire). Nous l'effleurerons en exercice et thème d'étude.

Terminons en touchant quelques mots sur la notion de croissance comparée qui nous servira également dans les cas douteux. Sous réserve de ne pas tomber sur des cas pathologiques : suite qui s'annule une infinité de fois, on dira que (u_n) est *négligeable* devant (v_n) si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Théorème 2-4-3 (Deux résultats de croissances comparées) :

1. $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$; on a même pour tout réel $a > 0$: $\lim_{n\to+\infty} n^a e^{-n} = 0$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{lnn}{n} = 0$; on a même pour tout réel a et tout réel $b > 0$: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$.

Démonstration :

1. Nous admettons, pour gagner du temps, que pour tout réel $x \geq 0$: $1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$.
   Mais alors pour tout réel $x > 0$: $\frac{e^x}{x} \geq \frac{1}{x} + 1 + \frac{x}{2}$. Le terme de droite tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, donc par comparaison $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$.
2. Soit $n > 0$. Posons $u_n = \frac{\ln n}{n}$. On a $u_n = \frac{\ln n}{e^{\ln n}}$.
   $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$ et par 1. : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, donc par composition $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Nous vous proposons dans les *fiches méthode* de ce chapitre un recueil de techniques utiles de calculs explicites de limite, qui seront également détaillées dans la **VIDEO 3**. Pour autant, toutes les suites ne sont pas définies explicitement et même pour celles qui le sont, il peut être extrêmement délicat de déterminer leur limite, si elle existe. Vous verrez en première année d'enseignement supérieur scientifique des outils plus performants. Mais patience !

Exemple 2-4-4 : En utilisant les résultats de croissance comparée $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{lnn}{n} = 0$, déterminer la limite des suites de terme général

1. a) $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ et b) $v_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$
2. $w_n = \frac{e^{n^2}}{n^3}$

Démonstration : Tout est question de réécriture !

1. a) Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{\ln(\sqrt{n}^2)}{\sqrt{n}} = 2\frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.
   Or $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, donc par composition : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\sqrt{n})}{\sqrt{n}} = 0$, et partant $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   b) Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $v_n = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2 = u_n^2$. On en déduit immédiatement que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
2. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln(w_n)$. Alors $w_n = n^2 - 3\ln n = n\left(n - 3\frac{\ln n}{n}\right)$.
   On a $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} n - 3\frac{\ln n}{n} = +\infty$, donc par produit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, on a par composition $\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.

3 Le raisonnement par récurrence (spécialité Maths)

Vous fréquentez l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ depuis votre plus tendre enfance où vous avez appris à compter sur vos doigts, puis appris vos tables d'addition et de multiplication. Pour autant, sauriez-vous définir $\mathbb{N}$?
Sa construction n'est pas au programme du secondaire, mais certaines de ses propriétés si ! Nous résumons donc ci-dessous les axiomes qui sont à la base de sa définition et qui permettent ensuite d'établir de nombreuses propriétés.

Axiomes de Peano : Il existe un ensemble $\mathbb{N}$ dont les éléments sont appelés les entiers naturels, un élément $0 \in \mathbb{N}$ appelé zéro et une application $s \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dite *application successeur*, vérifiant les propriétés suivantes :

1. 0 n'est le successeur d'aucun entier,
2. Deux nombres entiers qui ont le même successeur sont égaux,
3. Si $A \subset \mathbb{N}$ est tel que $\begin{cases} 0 \in A \\ s(A) \subset A \end{cases}$, alors $A = \mathbb{N}$.

Le point 3 définit le principe de récurrence, d'une utilité capitale en analyse et que nous allons reformuler de manière pragmatique et pratique sous la forme suivante :

Principe de récurrence (récurrence simple) : Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Initialisation : Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
Hérédité : Si pour tout entier naturel n, le fait que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie entraine que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie,
Conclusion : Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

On peut se représenter le principe de récurrence comme celui qui nous permet de monter une échelle infinie : le barreau du bas est numéroté 0, puis son successeur est numéroté 1, etc.
L'initialisation nous permet de mettre le pied sur le premier barreau 0 ; l'hérédité nous dit que si l'on a le pied sur le barreau n, alors on peut grimper au barreau suivant $n+1$ et ceci quelle que soit la valeur de n. Bref, avoir le droit de poser le pied sur le premier barreau et le droit de passer d'un barreau à son successeur nous permet de grimper notre échelle infinie.
Remarquons enfin que l'on peut remplacer 0 par tout autre entier n_0, auquel cas la conclusion devient : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n supérieur ou égal à n_0.

Exemple 3-1 : Prouvons que pour tout entier naturel n non nul :

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démonstration : voir aussi `https://www.youtube.com/watch?v=a6AWclssIF4`

1. Posons pour tout entier naturel n non nul : $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
   Initialisation : $1 = \dfrac{1+1}{2}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
   Hérédité : Soit n un entier naturel non nul quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Par hypothèse de récurrence : $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$.
Or $\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : on a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraine $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n non nuls *i.e* pour tout entier naturel n non nul : $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Posons pour tout entier naturel n non nul : $\mathcal{P}(n)$: $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Initialisation : $\dfrac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}=1=1^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel non nul quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$
i.e $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
Par hypothèse de récurrence, $1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$.
Or $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$.
Et $\dfrac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\dfrac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}$.
Enfin, comme $n(2n+1)+6(n+1)=2n^2+7n+6=(n+2)(2n+3)$, on en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : on a prouvé que $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et que pour tout entier naturel n non nul, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraine $\mathcal{P}(n+1)$ vraie, donc d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n non nuls *i.e* pour tout entier naturel n non nul : $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

† † † Il convient de rédiger parfaitement vos récurrences. Signalons quelques erreurs souvent commises et qui n'en sont pas moins abominables ! Voici le top 3 :

— N°3 : Dans l'hérédité, on suppose que **POUR UN CERTAIN** n donné, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie, qui peut se traduire par "*il existe* un entier naturel n" *tel que* $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors que l'hérédité repose sur le principe "*Pour tout* entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ vraie entraine $\mathcal{P}(n+1)$ vraie". Vous apprendrez ceci dans le supérieur avec les quantificateurs existentiels et universels.
— N°2 : **OUBLIER L'INITIALISATION** ! Grandes ou petites valeurs, le problème reste le même ; et puis pour reprendre l'heuristique de l'échelle, comment grimper le long de l'échelle si vous n'avez pas le droit de poser le pied dessus ?
— N°1 : Et enfin **LA PIRE DES ERREURS** qui consiste à prendre pour hypothèse de récurrence : "Supposons que POUR TOUT entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie". Autrement dit, vous prenez pour hypothèse exactement ce que vous cherchez à prouver !

Exemple 3-2 $\boxed{\textbf{VIDEO 4}}$: Considérons la suite $\mathbf{u}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. La première chose à vérifier est que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie, c'est-à-dire que l'on puisse calculer u_n pour n'importe quelle valeur de l'entier n.
   (a) ´Etudier les variations de $f\colon [-1;+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1+x}$ et justifier que si $x \in \mathbb{R}^+$, alors $f(x) \in \mathbb{R}^+$ (on dit que l'intervalle $[0;+\infty[$ est *stable* par f).
   (b) Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et que $u_n \geq 0$.
2. On suppose ici que $u_0 = 0$. Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 à u_3 à l'aide du graphe de f et de la droite D d'équation $y = x$ (la première bissectrice). Vers quelle valeur ℓ semblent se rapprocher les termes u_n ? (on pourra résoudre l'équation $f(x) = x$)
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$. Que dire sur la monotonie de $\mathbf{u}$? $\mathbf{u}$ est-elle minorée, majorée, bornée ?
4. Si l'on choisit $u_0 > \ell$, par exemple $u_0 = 2,5$, quel semble être le comportement de $\mathbf{u}$? Justifier par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout entier naturel n : $\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$.
5. Conclure selon la valeur initiale de $u_0 \in [-1;+\infty[$ de la limite éventuelle de la suite $\mathbf{u}$.
6. Qu'en est-il si $u_{n+1} = f(u_n)$, où $f\colon [0;+\infty[\to [0;+\infty[, x \mapsto x^2$? Vous préciserez selon la valeur de u_0 la convergence ou divergence éventuelle de $\mathbf{u}$. En revanche, vous prouverez de manière précise par récurrence la monotonie de $\mathbf{u}$ et son éventuel caractère minoré ou majoré. Let's play !

Solution : Nous verrons en exercice comment prolonger cet exercice et prouver de manière effective les résultats subodorés.

1. (a) $u\colon [-1;+\infty[\to \mathbb{R}^+, x \mapsto x+1$ est strictement croissante et $v\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante, donc par composition $f = v \circ u$ est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.
   (b) Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
   Initialisation : $u_0 = 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie !
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque ; supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : u_n existe et $u_n \geq 0$. Comme f est définie sur $\mathbb{R}^+$ et que $u_{n+1} = f(u_n)$, u_{n+1} existe et par croissance de f : $u_{n+1} = f(u_n) \geq f(0) = 1 > 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.
2. Il semble que la suite $\mathbf{u}$ converge vers l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et de la première bissectrice, ce qui revient à déterminer la solution sur $\mathbb{R}^+$ de $\sqrt{1+x} = x$. Cette équation équivaut à : $\begin{cases} 1+x = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$ *i.e* $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
3. Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$.
   Initialisation : $u_0 = 0$, $u_1 = f(u_0) = 1$ et $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \ell$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$.
   Prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ell$.
   Par croissance de f sur $\mathbb{R}^+$, on a : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\ell)$ i.e $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ell$ car $f(\ell) = \ell$. D'où $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \ell$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : Pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \ell$.
   On en déduit que la suite $\mathbf{u}$ est croissante et bornée (minorée par 0 et majorée par ℓ).

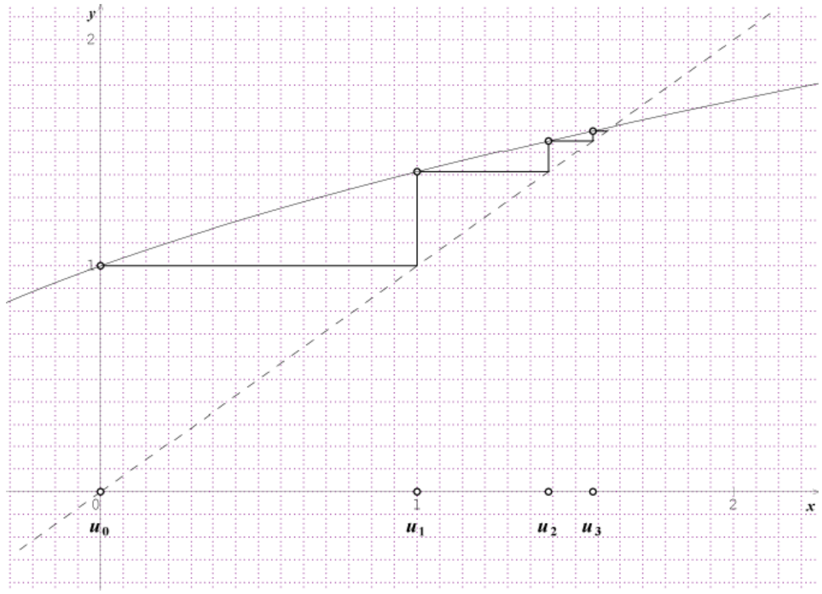

FIGURE 5 – Premiers termes avec $u_0 = 0$

4. Traçons les premiers termes de **u**.
   Là encore, ils semblent se rapprocher de ℓ.

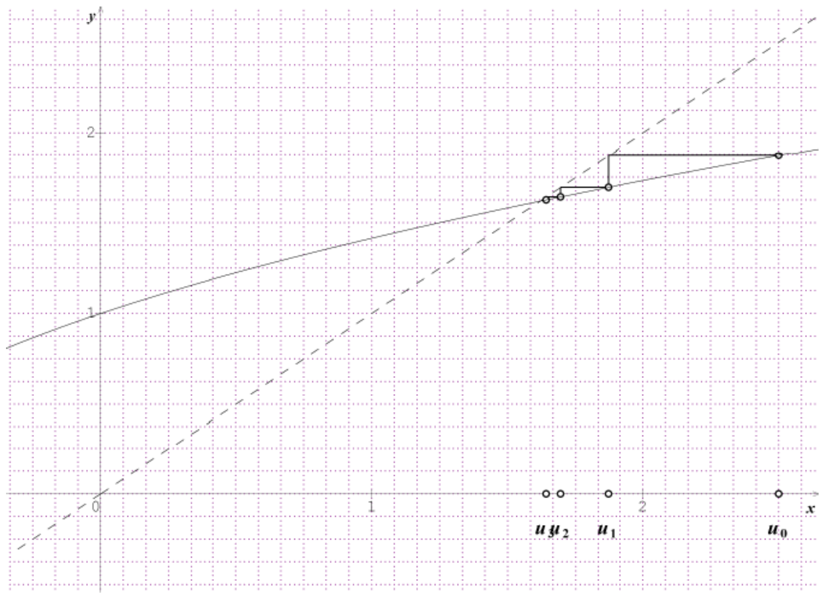

FIGURE 6 – Premiers termes avec $u_0 = 2,5$

Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: $\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$.
Initialisation : Soit $u_0 > \ell$. $u_1 = f(u_0) > f(\ell)$ par stricte croissance de f. Comme $f(\ell) = \ell$, on a $u_1 > \ell$. Enfin, $u_1 - u_0 = \sqrt{1+u_0} - u_0 = \dfrac{1 + u_0 - u_0^2}{\sqrt{1+u_0} + u_0}$. Mais le trinôme $1 + x - x^2$ prend des valeurs strictement négatives quand $x > \ell$, et comme $u_0 > \ell$, $1 + u_0 - u_0^2 < 0$, donc $u_1 - u_0 < 0$. D'où $\ell < u_1 < u_0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Paradoxalement, ce sera plus simple que l'initialisation ! Donnons-nous un entier naturel n quelconque et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie :$\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$. Par croissance de f : $\ell = f(\ell) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2} \leq f(u_n) = u_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier naturel n, $\ell \leq u_{n+1} \leq u_n$. On en déduit en particulier que si $u_0 > \ell$, la suite $\mathbf{u}$ est décroissante et minorée par ℓ.
Il semble là encore que les termes u_n se rapprochent de ℓ.

5. — Pour tout réel $u_0 \geq 0$, il semble que u converge vers ℓ : en croissant si $u_0 \in [0; \ell[$, en décroissant si $u_0 > \ell$, et en stagnant (suite constante) si $u_0 = \ell$ (récurrence triviale).
   — Si $u_0 \in [-1; 0[$, alors $u_1 \in [0; 1[\subset [0; \ell[$, et on est ramené au cas précédent.
6. Laissé à la sagacité du lecteur. Nous vous donnons le graphe utile à vos supputations.

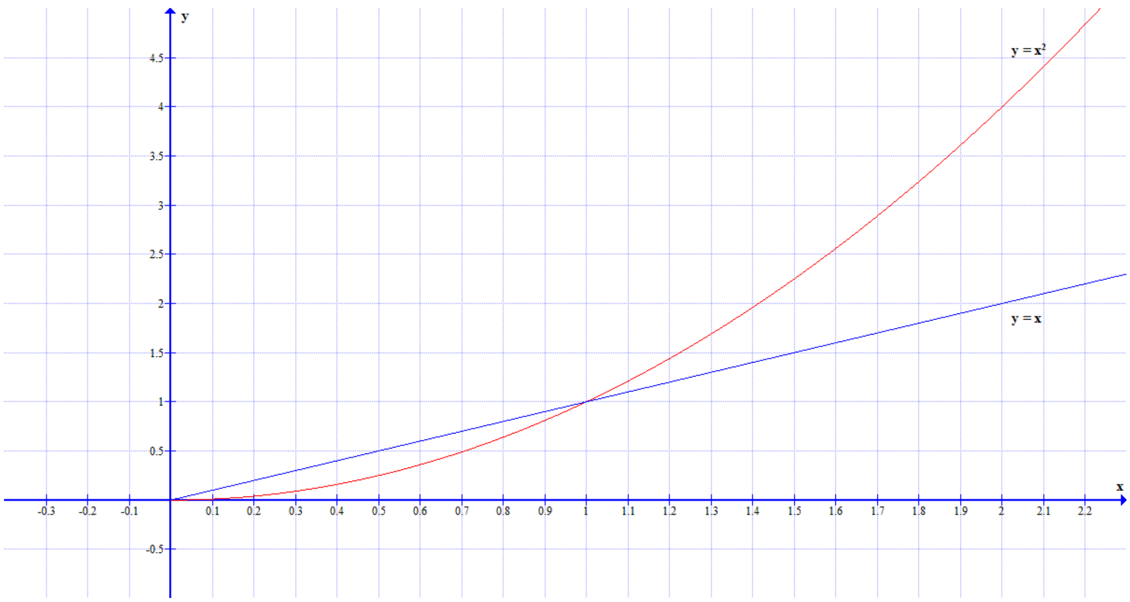

FIGURE 7 – Avec $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $u_{n+1} = u_n^2$

Il est parfois nécessaire de modifier le principe énoncé précédemment afin de prouver qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n (éventuellement apcr). C'est le cas notamment lorsqu'une suite est définie par une récurrence d'ordre 2 : u_0, u_1 donnés et pour tout entier naturel n : $u_{n+2} = f(n, u_n, u_{n+1})$. Énonçons le ...

Principe de récurrence (récurrence double) : Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Initialisation : Si $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies,
Hérédité : Si pour tout entier naturel n, le fait que $\mathcal{P}(n)$ et que $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies entraine que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie,
Conclusion : Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

Exemple 3-3 : On note $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \sqrt{u_n + u_{n+1} + 3}$. Prouver que la suite $\mathbf{u}$ est bien définie, croissante et majorée par 3.

Solution : Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}(n)$: u_n, et u_{n+1} sont bien définis et $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ sont bien définis et $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. $u_2 = \sqrt{0 + 1 + 3} = 2$ est bien défini et on a $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 3$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies : u_n, u_{n+1} et u_{n+2} sont bien définis et $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$. Prouvons que $\mathcal{P}(n+2)$ vraie : u_{n+2} et u_{n+3} sont bien définis

et $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+3} \leq 3$.
Par hypothèse, u_{n+2} est bien défini et comme $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+2} \geq 0$, $u_{n+3} = \sqrt{u_{n+1} + u_{n+2} + 3}$ est bien défini. De plus, par hypothèse de récurrence : $0 \leq u_n + u_{n+1} + 3 \leq u_{n+1} + u_{n+2} + 3 \leq 3+3+3 = 9$. Par croissance de la fonction racine carrée : $0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+3} \leq 3$, donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}$ est croissante et majorée par 3.

Voir aussi `https://www.youtube.com/watch?v=G_KqFsucyBs`

Dans certains cas, il est même nécessaire de considérer le cas de tous les $\mathcal{P}(k),\ 0 \leq k \leq n$.

Principe de récurrence (récurrence forte) : Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Initialisation : Si $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
Hérédité : Si pour tout entier naturel n donné, le fait que tous les $\mathcal{P}(k)$ soient vraies (pour k compris entre 0 et n) entraine que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie,
Conclusion : Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tous les entiers naturels n.

Exemple 3-4 : Soit $\mathbf{u}$ la suite définie par $u_0 \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k$.
Prouvons que pour tout entier naturel n : $u_n \leq 2^n u_0$.

Solution : Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}(n)$: $u_n \leq 2^n u_0$.
Initialisation : $u_0 = 2^0 u_0 \leq 2^0 u_0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(0),\ \mathcal{P}(1), \ldots \mathcal{P}(n)$ vraies et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ vraie : $u_{n+1} \leq 2^{n+1} u_0$.
$u_{n+1} \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} 2^k u_0 = u_0 \frac{2^{n+1}-1}{2-1} \leq 2^{n+1} u_0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout entier naturel n : $u_n \leq 2^n u_0$.

Remarque 3-5 : il existe d'autres formes de récurrence : triple, descendante, limitée, etc. Nous en verrons quelques unes en exercice, mais déjà, maitriser correctement celles qui sont présentées ci-dessus est essentiel. Le raisonnement par récurrence est très courant en mathématiques et s'applique à de nombreuses situations qui dépassent largement le thème de ce cours.

4 Théorèmes d'existence, de comparaison et d'encadrement

Théorème 4-1 (de la limite monotone) : FONDAMENTAL !

1. (a) Toute suite croissante et majorée converge.
   (b) Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
2. (a) Toute suite décroissante et minorée converge.
   (b) Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

Les théorèmes 1.(a) et 2.(a) sont admis au niveau du secondaire, mais leur utilité n'en reste pas moins redoutable ! Signalons donc en corollaire que **toute suite monotone et bornée est nécessairement convergente**. Démontrons 1. (b) :
Supposons $\mathbf{u}$ croissante et non majorée :

— **u** non majorée, donc pour tout réel $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que $u_N > A$.
— **u** croissante, donc pour tout entier naturel $n \geq N$: $u_n \geq u_N > A$.

Conclusion : on a prouvé que pour tout réel $A > 0$ il existait un entier naturel N, tel que pour tout entier $n \geq N$: $u_n > A$, ce qui est la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exemple 4-2 : Soit **u** la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 6}$.

1. On suppose $u_0 = 0$.
   (a) Prouver que pour tout entier naturel n que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
   (b) En déduire que **u** converge.
2. On suppose $u_0 = 10$.
   (a) Prouver que pour tout entier naturel n que $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$.
   (b) En déduire que **u** converge.

Solution : Une récurrence immédiate prouve que pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et $u_n \geq 0$.

1. (a) La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x + 6}$ est clairement strictement croissante.
   Pour tout entier naturel n, posons $\mathcal{P}(n)$: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
   Initialisation : $u_1 = \sqrt{6} \leq 6$, donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : Fixons-nous un entier naturel n quelconque et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$. Par croissance de f sur $[0; +\infty[$, on a : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(6)$ i.e $\sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \sqrt{24}$. Comme $\sqrt{24} < 6$:
   $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 6$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   Conclusion : pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$.
   (b) Croissante et majorée, **u** converge.
2. En raisonnant comme à la question précédente, on prouve que **u** est décroissante et minorée, donc convergente.

Remarquons que le théorème de la limite monotone est un *théorème d'existence* de limite. Il ne donne en aucun cas sa valeur.
Nous disposons encore d'autres résultats d'existence :

Théorème 4-3 (de comparaison) : Soient **u** et **v** deux suites réelles. On suppose qu'apcr $u_n \leq v_n$. Alors :

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors **u** a une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors **v** a une limite et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration : On peut comprendre heuristiquement ce résultat comme : si le plus grand (resp. le plus petit) des deux termes généraux de nos deux suites tend vers $-\infty$ (resp. vers $+\infty$), alors le plus petit (resp. le plus grand) tend nécessairement vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). Prouvons le premier point. Le second se traite de même. Il s'agit de démontrer que pour tout réel $A > 0$, il existe un entier N tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq -A$.
Soit N_1 un entier tel que pour tout entier $n \geq N_1$: $u_n \leq v_n$.
Soit A un réel strictement positif. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, il existe un entier naturel N_2 tel que pour tout entier $n \geq N_2$: $v_n \leq -A$.
Mais alors pour tout entier $n \geq N = \max(N_1, N_2)$: $u_n \leq v_n \leq -A$, ce qui prouve bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. ⊠

Exemple 4-4 : Soit x un réel strictement positif. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n : $(1+x)^n \geq 1+nx$ et en déduire que si $q>1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Solution : Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.
Initialisation : $(1+x)^0 = 1 = 1+0\times x$, donc $\mathcal{P}(0)$ vraie.
Hérédité : Soit n un entier naturel quelconque. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie : $(1+x)^n \geq 1+nx$, et prouvons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$.
Multiplions chaque membre de l'inégalité $(1+x)^n \geq 1+nx$ par le réel strictement positif $1+x$. On obtient $(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, pour tout entier naturel n : $(1+x)^n \geq 1+nx$.
Posons pour tout entier naturel n : $u_n = 1+nx$ et $v_n = (1+x)^n$. On a pour tout entier naturel n : $v_n \geq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. D'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
Soit $q>1$. On peut écrire $q = 1+x$, avec $x = q-1 > 0$.
D'après ce qui précède : $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Théorème 4-5 (encadrement) : Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. Si apcr $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Démonstration : Soit $\epsilon > 0$. Par hypothèse, il existe un rang N_1 à partir duquel $v_n \leq u_n \leq w_n$. Puis il existe un rang N_2 à partir duquel $\ell - \epsilon < v_n$ et un rang N_3 à partir duquel $w_n < \ell + \epsilon$. Donc si $n \geq \sup(N_1, N_2, N_3)$, on a $\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon$ *i.e* $|u_n - \ell| < \epsilon$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. ⊠

† † † Le théorème d'encadrement n'est pas un simple théorème de passage à la limite dans des inégalités larges. Quand on passe à la limite dans une inégalité, ON SAIT DÉJÀ que les membres de gauche et de droite ont une limite. Dans le théorème d'encadrement, seules les limites des suites **v** et **w** sont supposées exister (et être égales). On en déduit l'existence de la limite de **u** et sa valeur.

Exemple 4-6 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{3n+\sin n}{n}$. Justifier que **u** converge et préciser sa limite.

Solution : Remarquons que pour tout entier naturel n non nul : $u_n = 3 + \dfrac{\sin n}{n}$. Il suffit donc d'encadrer $\dfrac{\sin n}{n}$. Or pour tout entier n : $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc pour tout entier naturel n non nul : $3 - \dfrac{1}{n} \leq u_n \leq 3 + \dfrac{1}{n}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{1}{n} = 3$, on a par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

Quiz 4-7 : Pour chaque question, une ou plusieurs réponses sont possibles.

1. Soit **u** la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$. Alors **u** est :
   (a) croissante (b) décroissante (c) minorée (d) majorée (e) convergente (f) divergente
2. Si une suite **u** est décroissante et minorée par 0, alors la limite de **u** est 0.
   (a) VRAI (b) FAUX

3. Si pour tout entier naturel non nul : $3 \leq u_n \leq 5$, alors :
   (a) **u** a pour limite 4 (b) **u** diverge (c) on ne peut rien dire
4. Une suite **u** non minorée :
   (a) ne peut pas tendre vers $+\infty$ (b) tend vers $-\infty$ (c) diverge toujours
5. Le produit d'une suite **u** bornée par une suite **v** de limite nulle est une suite :
   (a) minorée (b) majorée (c) divergente (d) qui tend vers 0

Solution :

1. (b) (c) (d) (e) : se rendre compte que pour tout $x \in [0;1]$ $\dfrac{x^{n+1}}{1+x} \leq \dfrac{x^n}{1+x}$ et utiliser la croissance de l'intégrale, puis que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
2. (b) : prendre par exemple $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ $(n \geq 1)$.
3. (c) : prendre par exemple $u_n = 3 + 2\dfrac{\sin n}{n}$ et $v_n = 3$ si n est pair et $v_n = 5$ si n est impair : **u** tend vers 3 mais **v** n'a pas de limite.
4. (a) et (c) : pour (a) revenir aux définitions de **u** minorée et de **u** tend vers $+\infty$ et raisonner par l'absurde. Pour (c), se rappeler que toute suite convergente est bornée, donc minorée.
5. (a) (b) et (d) : il existe $M > 0$ tel que pour tout entier naturel n : $-M|v_n| \leq u_n v_n \leq M|v_n|$ puis appliquer le théorème d'encadrement.

5 $u_{n+1} = f(u_n)$

Nous avons étudié à l'exemple 3-2 une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$, mais malgré quelques avancées : exploration graphique, preuve par récurrence du caractère minoré ou majoré et croissance de la suite, il nous manque la preuve rigoureuse de la convergence de **u** et la calcul de sa limite.
Cette section se propose d'initier le lecteur à l'étude de telles suites à travers quelques exemples simples. Un chapitre entier leur est consacré pour aller plus loin dans leur approche.

Théorème 5-1 : Soit **u** une suite réelle définie par récurrence : u_0 donné et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$. Si **u** converge vers ℓ et f **continue** en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.

Ce théorème est admis au niveau du secondaire, mais se retrouve propulsé comme outil fondamental de recherche de limite : **Si jamais la suite u converge, alors sa limite est l'une des solutions éventuelles de l'équation $f(x) = x$ sur l'ensemble de définition de f.** Cette dernière fonction sera toujours considérée comme continue.
Bon, démontrons-le quand même !

Démonstration : Fixons $\epsilon > 0$. Comme f est continue en ℓ, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout réel $x \in D_f \cap]\ell - \eta; \ell + \eta[$, $|f(x) - f(\ell)| < \epsilon$.
Or (u_n) converge vers ℓ, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $|x_n - \ell| < \eta$.
Mais alors si $n \geq N$, $|f(u_n) - f(\ell)| < \epsilon$. Donc $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.
D'autre part, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, (u_{n+1}) converge vers ℓ donc par unicité

de la limite : $\ell = f(\ell)$.

En fait, comme nous le verrons au chapitre **continuité d'une fonction de la variable réelle**, nous disposons même d'un théorème extrêmement important et pratique caractérisant la continuité d'une fonction en un point.

Théorème (caractérisation séquentielle de la continuité) : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $\ell \in D$. Alors :
f est continue en ℓ si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de D convergeant vers ℓ, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Revenons à nos moutons !

Un peu de théorie applicable en pratique Dans toute la suite, f désigne une fonction définie (et même continue) sur une partie D de $\mathbb{R}$ telle que $f(D) \subset D$ i.e telle que pour tout $x \in D,\ f(x) \in D$: on dit que D est stable par f. Soit (u_n) une suite définie par récurrence par $u_0 \in D$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On prouve aisément par récurrence que (u_n) est bien définie et que pour tout entier naturel n : $u_n \in D$.
2. Limites éventuelles : on résout l'équation $(E)\ : f(x) = x$ sur D. Ses solutions sont les seules limites possibles de la suite (u_n) d'après le théorème 5-1. S'il n'y en a pas, c'est terminé : (u_n) diverge.
3. On suppose (ou on prouve par une étude de fonction) que f est **croissante** sur D.
   a) Si $u_0 \leq u_1$ (resp. $u_0 \geq u_1$) on prouve par récurrence que la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante).
   b) On prouve ensuite par récurrence que (u_n) est majorée ou minorée, très souvent par l'une des solutions ℓ de (E).
   c) Croissante et majorée OU décroissante et minorée, (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.
   d) En fonction de ce qui a été démontré en a) et b), on sait vers quelle solution de (E) la suite converge et on conclut.

Le cas où f est **décroissante** sera abordé en exercice.

Un exemple type : Soit f la fonction définie sur $D = [0;1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$ et la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n + 2}$.

1. Justifier que f est strictement croissante sur D et préciser les valeurs $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que si $x \in D$, alors $f(x) \in D$.
2. Prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ et en déduire que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
3. En étudiant la fonction g définie sur D par $g(x) = e^x - x(x+2)$, justifier que l'équation $(E)\ : f(x) = x$ admet une unique solution α sur D. Vous donnerez un encadrement de α à 10^{-2} près.
4. En déduire que (u_n) converge vers α.

Solution : Remarquons que f est dérivable sur $D = [0;1]$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur D dont celle au dénominateur ne s'annule pas.

1. Pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur D. On a $f(0) = \dfrac{1}{2}$ et $f(1) = \dfrac{\sqrt{e}}{3}$.
2. Posons pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}_n \ : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
   Initialisation : Comme f est croissante sur $[0;1]$:
   $0 \leq u_0 = \dfrac{1}{2} = f(0) \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leq f(1) = \dfrac{\sqrt{e}}{3} \leq 1$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque. Supposons $\mathcal{P}_n \ : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ vraie. Alors par croissance de f sur $[0;1]$: $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$ i.e $\dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dfrac{\sqrt{e}}{3}$.
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.
   On en déduit que la suite (u_n) est croissante et majorée, donc converge d'après le théorème de la limite monotone.
   Notons ℓ sa limite et remarquons que puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$, alors $\ell \in [0;1]$ (le fait que $D = [0;1]$ soit fermé est important : considérer $1/n \ldots$).
3. Soit $x \in D$.
   $f(x) = x \iff \dfrac{e^x}{x+2} - x = 0 \iff \dfrac{e^x - x(x+2)}{x+2} = 0 \iff e^x - x(x+2) = 0.$
   On pose pour tout $x \in D$, $g(x) = e^x - x(x+2)$.
   g est indéfiniment dérivable sur D et pour tout réel $x \in D$:
   $g'(x) = e^x - 2x - 2$ et $g''(x) = e^x - 2$ (pas le choix de calculer $g''(x)$).
   $g''(x) \leq 0 \iff x \in [0; \ln 2]$ et $g''(x) \geq 0 \iff x \in [\ln 2; 1]$. Donc g' possède un minimum global en $x = \ln 2$. Comme $g'(0) = -1 < 0$ et $g'(1) = e - 4 < 0$, on en déduit que $g'(x) < 0$ pour tout $x \in D$. Donc g est strictement décroissante sur D.
   Ainsi, g est continue sur $D = [0;1]$, strictement décroissante, et $0 \in [g(1); g(0)] = [e-3; 1]$, donc d'après le TVI strictement monotone, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution $\alpha \in D$. En utilisant une calculatrice, on obtient $0,78 < \alpha < 0,79$.
4. Nous savons que (u_n) converge vers $\ell \in D$ et que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est continue sur D, alors le théorème 5.1 nous assure que ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$ sur D. Or cette équation a une unique solution α d'après la question précédente, donc par unicité de la limite $\ell = \alpha$.

6 Exercices

Nous regroupons ici des exercices niveau Maths complémentaires (MC), de Maths spécialité (MS) ainsi que quelques exercices de Maths expertes (ME). Les deux derniers exercices sont plus théoriques. L'exercice 10 nécessite notamment de connaître le cours de calcul intégral.

Exercice 0 : Définir deux fonctions : l'une présentant f croissante et $\mathbf{u}$ définie par récurrence décroissante ; l'autre f décroissante et $\mathbf{u}$ définie par récurrence non monotone.

Exercice 1 (MC et MS) : Préciser dans chacun des cas si la suite est définie de manière explicite ou par récurrence et calculer les termes u_0 à u_3.

1. Pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2n-3}{n^2+1}$
2. Pour tout entier naturel n, $u_n = 4^n - 2^n$
3. $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -u_n^2 + n - 1$
4. $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 2$

Exercice 2 (MC et MS) : Justifier précisément le sens de variation des suites de terme général :

1. $u_n = 5 \times 3^{2n}$
2. $u_n = -\dfrac{2}{n+1}$
3. $u_0 = -10$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$
4. $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{e^n}$

Exercice 3 (MC et MS) : Justifier précisément si les suites de terme général ci-dessous sont minorées, majorées, bornées ou non.

1. $u_n = \cos n$
2. $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$
3. $u_n = 3n - 7$
4. $u_n = (-3)^n$
5. $u_n = 0,4^n$

Exercice 4 (MC, MS et ME) : Soit $E = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ; \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^k},\ \epsilon_k \in \{-1;1\}\}$.

Écrire un programme en Python qui prend pour entrée un réel quelconque $x \in [-1;1]$ et un seuil de précision $\epsilon > 0$ et qui renvoie u_n comme défini ci-dessus, tel que $|u_n - x| < \epsilon$.
Nous prouverons plus tard que toute suite appartenant à l'ensemble E est convergente vers un réel $x \in [-1;1]$ et que réciproquement, tout réel $x \in [-1;1]$ est limite d'une suite $u \in E$.

Exercice 5 (MC, MS et ME) : Considérons la suite $\mathbf{u}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sin n$. On suppose par l'absurde que la suite $\mathbf{u}$ converge vers un réel ℓ.

1. Exprimer $\sin(n+1)$ en fonction de $\sin n$ et de $\cos n$ puis en déduire en faisant tendre n vers $+\infty$ que la suite de terme général $\cos n$ converge vers une limite que l'on précisera.
2. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, justifier que $\ell \neq 0$.
3. Exprimer $\sin(2n)$ en fonction de $\sin n$ et de $\cos n$, puis aboutir à une contradiction.

Exercice 6 (MC, MS et ME) : Déterminer les limites, si elles existent, des suites de terme général :

1. a) $u_n = 3n^2 - 10n + 1$ b) $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 5}{n^3 + 5n^2 + 1}$ c) $u_n = \dfrac{3 - \ln n}{\sqrt{n}}$ d) $u_n = (-2)^n$
2. a) $u_n = n^{10}e^{-n}$ b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ d) $u_n = \dfrac{3^n}{n^2}$
3. a) $u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0,5^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ b) $u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2^n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

Exercice 7 (MS et ME) : Prouver qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire *i.e* constante à partir d'un certain rang : pour N assez grand $u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \dots$.

Exercice 8 (MS et ME) : Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux suites et soient a et b deux réels tels que pour tout entier naturel n : $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$. Prouver que si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = a + b$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

Exercice 9 (MS et ME) : Nous rappelons le résultat suivant :
Théorème : Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur D. Considérons la suite $\mathbf{u}$ définie par récurrence : $u_0 \in D$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier naturel n. Si $\mathbf{u}$ converge vers $\ell \in D$ et si la fonction f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.
Autrement dit, les *limites éventuelles* de $\mathbf{u}$ sont à chercher parmi les points fixes de f *i.e* parmi les solutions de l'équation $f(x) = x$ sur D.

1. Justifier proprement la convergence de $\mathbf{u}$ de l'exemple 3-2 vers une limite que vous préciserez.
2. Étudier la suite $\mathbf{u}$ définie par la donnée de $u_0 \geq 0$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \sin u_n$.
   (a) Rechercher les limites éventuelles en déterminant la ou les solutions de l'équation $\sin x = x$ sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Traiter le cas où $u_0 = 0$. On supposera désormais que $u_0 > 0$..
   (c) Prouver que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) En déduire que la suite $\mathbf{u}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 10 (MS et ME) : Ce problème a pour but d'étudier la suite de terme général $\dfrac{n^n e^{-n}}{n!}$ et de donner une expression de e^a comme limite d'une suite.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \dfrac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Étudier les variations de f_n et démontrer que pour tout $n \geq 2$, $f_{n-1}(n) = f_n(n)$.
2. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = f_n(n)$. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante. Cette suite est-elle convergente ? (justifier la réponse).
3. Soit g la fonction définie sur $I = [0; 1]$ par : $g(t) = \ln(1+t) - t + \dfrac{t^2}{4}$.
   a) En étudiant les variations de g, démontrer que pour tout $t \in I$, $\ln(1+t) \leq t - \dfrac{t^2}{4}$.
   b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leq e^{1-1/4n}$

4. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq e^{-1/4n}$ et en déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $u_n \leq \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{n-2} + \cdots + \dfrac{1}{2} + 1\right)\right)$.

5. a) Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\displaystyle\int_1^n \frac{dt}{t} \leq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1}$.
(on pourra utiliser des considérations d'aire).
b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $u_n \leq \exp\left(-1 - \dfrac{1}{4}\ln n\right)$. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

6. Pour tout entier $n \geq 1$ et réel $a \geq 0$, a fixé, on pose : $I_n(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^n e^{-t}}{n!} dt$.
a) Calculer $I_1(a)$.
b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $t \geq 0$, on a : $0 \leq f_n(t) \leq \dfrac{t^n}{n!}$.
c) En déduire un encadrement de $I_n(a)$.

7. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $\dfrac{1}{n!} < \left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ (on pourra utiliser 2.). Déterminer alors une nouvelle majorationde $I_n(a)$ puis la limite de $I_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

8. a) En utilisant une intégration par parties, établir une relation entre $I_n(a)$ et $I_{n-1}(a)$ pour tout entier $n \geq 2$.
b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $I_n(a) = 1 - e^{-a}\left(1 + \dfrac{a}{1!} + \cdots + \dfrac{a^n}{n!}\right)$.
Cette égalité reste-t-elle valable pour $n = 1$?

9. Démontrer que pour tout réel $a \geq 0$, on a : $e^a = \displaystyle\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}\right)$.

(D'après Bac C-E)

Exercice 11 (MS et ME) : Dans toute la suite, f désigne une fonction continue et strictement décroissante sur un segment $D = [a; b]$ $(a < b)$ de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in D$, $f(x) \in D$.
On suppose que l'équation (E) : $x = f(x)$ a une unique solution $\alpha \in D$.
Soit (u_n) une suite définie par récurrence par $u_0 \in D$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose ici $u_0 = \alpha$. Que dire de la convergence de (u_n) ? On supposera désormais $u_0 \neq \alpha$.

2. On pose pour tout $x \in D$, $h = f \circ f$.
a) Justifier que h est bien définie sur D, et à valeurs dans D, puis que h est continue sur D.
b) Quel est le sens de variation de h sur D ?

3. Considérons les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Supposons $u_0 \leq u_2$.
a) Démontrer par récurrence que la suite (u_{2n}) est bien définie et croissante.
b) Démontrer que la suite (u_{2n+1}) est bien définie et décroissante.
c) Que peut-on dire de la suite (u_n) si $u_{2n+1} - u_{2n}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$?

4. Et si $u_0 \geq u_2$?