Second degré - Equations et inéquations

1 Introduction générale

1.1 Un petit pas vers l'antiquité

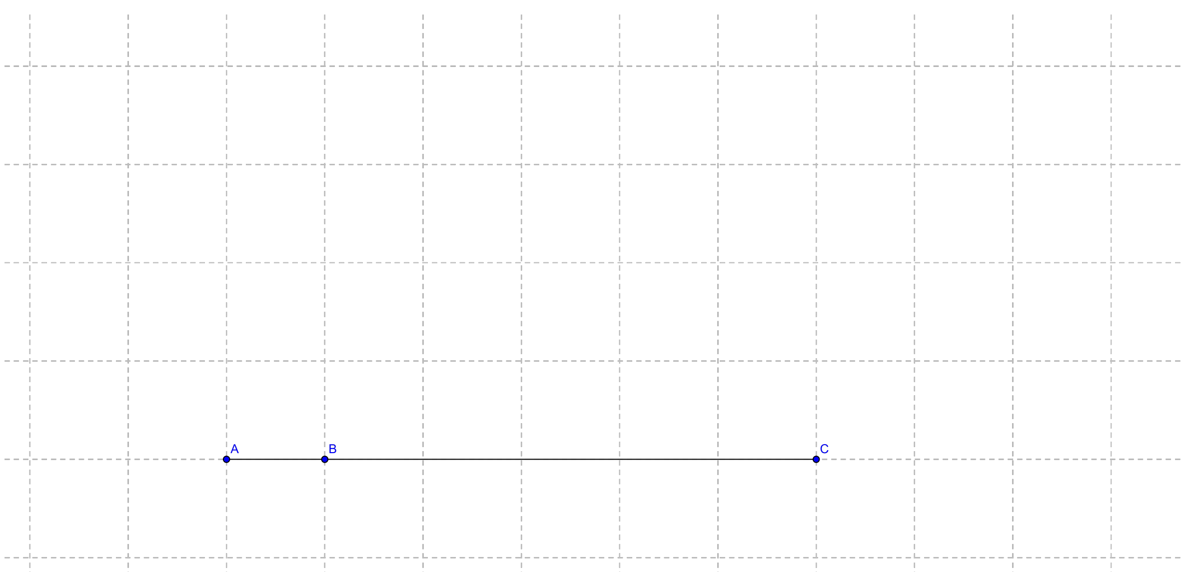
Nous allons dans ce paragraphe poser un problème de construction géométrique que nous pouvons résoudre immédiatement, à condition de bien réfléchir. Pas de panique, je vous guiderai ! Son origine est historique. Mais avant toute chose, commençons par nous interroger sur quelques points de détails...

1. D'où provient le terme de *fonction carrée* (cf activité 1) ?
2. Si l'on multiplie les côtés d'un carré par 2, par combien son aire se trouve-t-elle multipliée ?
3. Si l'on multiplie les côtés d'un carré par 5, par combien son aire se trouve-t-elle multipliée ?
4. Si l'on multiplie les côtés d'un carré par $\sqrt{3}$, par combien son aire se trouve-t-elle multipliée ?
5. Plus généralement, si l'on multiplie les côtés d'un carré par $k > 0$, par combien son aire se trouve-t-elle multipliée ?
6. Généralisons encore : peut-on élever au carré un nombre négatif ? Si oui, décrire l'opération effectuée. L'appliquer avec $x = -3,5$ et $x = -7,1$.

Orientons-nous à présent du côté de la géométrie...

Pour les Grecs anciens, tout nombre ne pouvait être que rationnel, c'est-à-dire s'écrire comme le quotient de deux entiers. Pythagore prouva qu'il n'en était rien en démontrant que la diagonale d'un carré de côté 1 (calculez sa longueur) ne pouvait être rationnelle. Ceci troubla profondément ses contemporains. La notion de nombre irrationnel était née. Les plus célèbres sont entre autres $\sqrt{2}$ et π. Mais il y en a bien d'autres... En fait, une infinité !

Exercice : Le graphique suivant représente un segment [AC] de longueur 6. Le point B appartient au segment [AB] et a pour longueur AB = 1. Construire un point D **à l'aide de la règle et du compas seulement** telle que la longueur du segment [BD] soit égale à $\sqrt{5}$.
Indication : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. a pourra être pris égal à ... 1



1.2 Passons la seconde...

La courbe de l'activité 2 est celle de la fonction carrée. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Quelle propriété de symétrie remarquable possède-t-elle ?
2. En déduire une relation générale liant $f(x)$ et $f(-x)$
3. Vérifiez la propriété précédente par le calcul avec $x = 2$; $x = -4$; et $x = \sqrt{2}$.
4. Quelle **différence énorme** faîtes-vous entre calculer $f(4)$ et résoudre l'équation $f(x) = 4$?
5. Répondre à l'aide du graphique à la question précédente **en laissant bien apparents vos traits de construction**.

Exercice : En utilisant la courbe représentative f de la fonction carrée, dessinez sur le graphique précédent les courbes représentatives des fonctions f_1 à f_7 définies par :

1. $f_1(x) = x^2 + 3$ (*remarque* : $f_1(x) = f(x) + 3$).
2. $f_2(x) = x^2 - 4$
3. $f_3(x) = (x + 2)^2$ (*remarque* : $f_3(x) = f(x + 2)$).
4. $f_4(x) = (x - 3)^2$
5. $f_5(x) = (x - 4)^2 + 1$ (*remarque* : $f_5(x) = f(x - 4) + 1$).
6. $f_6(x) = 0,5x^2$ (*remarque* : $f_6(x) = \dfrac{1}{2}f(x)$).
7. $f_7(x) = -x^2$

Exercice : Quel effet on les transformations suivantes en partant de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f ?

1. a) $f(x) + k$; b) $f(x) - k$, où k est un réel strictement positif ?
2. a) $f(x + k)$; b) $f(x - k)$, où k est un réel strictement positif ?
3. $kf(x)$ où : a) $0 < k < 1$; b) $k > 1$
4. $kf(x)$ où $k < 0$

Définition : On appelle fonction polynôme de degré 2 ou trinôme, toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Remarques importantes :
- Cette fonction peut se mettre sous la forme suivante : $f(x) = a(x - \beta)^2 + \gamma$, appelée **forme canonique**. C'est cette dernière qui est à la base du théorème de la section suivante.
- La courbe représentative d'un polynôme de degré 2 est une **parabole**.

2 Equations du second degré

Théorème et définition : Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ un polynôme de degré 2.
On appelle **discriminant** le nombre réel noté Δ et défini par $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution réelle et $f(x)$ ne se factorise pas.
2. Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution réelle $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$ et $f(x)$ se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_0)^2$.
3. Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus, $f(x)$ se factorise sous la forme $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarques :

- Il faudra toujours se ramener à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.
- Ce théorème est utile lorsqu'on ne peut pas se ramener à une équation produit

Exemples : Résolvons les équations suivantes et factorisons si possible le trinôme $f(x)$.

1. $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

2. $16x^2 + 40x + 25 = 0$

3. $x^2 + x + 1 = 0$

4. $-5x^2 + 7x = 0$

Remarques :

1. Si $a > 0$, la courbe représentative de f a la forme d'un $\cup$; si $a < 0$ la courbe représentative de f a la forme d'un $\cap$.
2. Dire que l'équation $f(x) = 0$ a (au moins) une solution signifie que la parabole représentant f coupe l'axe des abscisse en (au moins) un point.

Exercice important : Dessinez en fonction du signe de a et de celui de Δ toutes les positions possibles entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

3 Signe d'un trinôme - Inéquations du second degré

3.1 Variations d'une fonction trinôme

On rappelle (vu en seconde) que le sommet d'une parabole a toujours pour abscisse $-\frac{b}{2a}$, quelque soit le signe de Δ et quelque soit le signe de a.

Calculez en fonction de Δ le nombre $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.
En prenant en compte le signe de a, en déduire les deux tableaux de variations possibles pour une fonction trinôme.

3.2 Signe d'un trinôme

En utilisant l'exercice important de la section précédente, donnez le signe d'un trinôme en fonction de a et du signe de Δ.

Applications : Déterminez en fonction de x le signe de $f(x) = x^2 + 5x - 3$ et en déduire les solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

étape 1 : on résout d'abord l'équation $f(x) = 0$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 37 > 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-5 - \sqrt{37}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

étape 2 : on utilise le résultat du cours. A vous de le faire !

Même question avec $f(x) = 4x^2 - 3x - 2$ puis $g(x) = (2x - 5)(x^2 + 4x + 1)$ et $h(x) = -3x + 1 + \dfrac{1}{x}$. (Il peut être judicieux de penser à un tableau de signes pour g et h).